ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კახაბერ შაშიაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ზოგიერთი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის გრადიენტის აპროქსიმაცია

ს ა დ ო ქ ტ ო რ ო დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
ჯემალ როგავა

თბილისი – 2015

რეზიუმე

სადისერტაციო ნაშრომში დადგენილია მათემატიკური ანალიზის ახალი ენერგეტიკული უტოლობა, კერძოდ, წონიანი შებრუნებული პუანკარეს უტოლობა ევკლიდეს $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემოსაზღვრულ, ღია ამოზნექილ D ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ორი ნახევრადამოზნექილი ფუნქციის სხვაობისთვის. ამ უტოლობაზე დაყრდნობით განვითარებულია არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნის გრადიენტის რიცხვითი გამოთვლის ხერხი იმ დაშვებაში, რომ ეს ამონახსნი ნახევრადამოზნექილი ფუნქციაა D არეში. ამ მიდგომის ძირითადი იარაღია ამოზნექილი ანალიზის ისეთი ფუნდამენტალური ცნებები, როგორიცაა მოცემული ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები და იმავე ფუნქციის დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები. დისკრეტული ამოზნექილი მომვლების რიცხვითი გამოთვლა ხორციელდება წერტილთა სასრული სიმრავლის ამოზნექილი გარსის რიცხვითი გამოთვლის სწრაფი და ეფექტური QHULL კომპიუტერული ალგორითმის მეშვეობით.

დისერტაციაში განვითარებული მიდგომა გამოყენებულია ჰამილტონ–იაკობის, სკალარული შენახვის კანონებისა და მონჟ–ამპერის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების უცნობი ამონახსნებისა და მათი გრადიენტების რიცხვითი გამოთვლისთვის.

შემოთავაზებული მიდგომის ძირითადი ეტაპები შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს. პირველ ეტაპზე იგება კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნის რაიმე თანაბარი მიახლოება, ვთქვათ, კლასიკური სასრულსხვაობიანი მეთოდით, ხოლო შემდგომ მეორე ეტაპზე იგება ამ უკანასკნელი თანაბარი აპროქსიმაციის დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები და გამოითვლება მისი გრადიენტი. მაშინ სადისერტაციო ნაშრომის ცენტრალური შედეგი ე. წ. წონიანი შებრუნებული პუანკარეს უტოლობა გარანტირებს, რომ გამოთვლილი გრადიენტი წარმოადგენს კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნის გრადიენტის L^2-მიახლოებას.

სამივე დიფერენციალური განტოლებისთვის განხილულია ტესტური მაგალითები და მათთვის დათვლილია ზუსტი ამონახსნის თანაბარი მიახლოებისა და ზუსტი გრადიენტის L^2-მიახლოების ცდომილობები.

ტესტური მაგალითებისთვის მოცემულია აგრეთვე მიახლოებითი და ზუსტი ამონახსნების და მათი სათანადო გრადიენტების კომპიუტერული ვიზუალიზაცია.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Kakhaber Shashiashvili

Faculty of Exact and Natural Sciences
Department of Mathematics

Approximation of the Gradient of the Solution of Some Nonlinear Partial Differential Equations

D o c t o r a l D i s s e r t a t i o n

Research Supervisor:
Doctor of Science Physics
and Mathematics, Professor
Jemal Rogava

Tbilisi – 2015

Abstract

The new energy inequality of mathematical analysis is established in this thesis, namely the weighted reverse Poincare inequality for the difference of two semi convex functions defined on a bounded open convex subset D of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Based on this inequality the device of the numerical computation of the gradient of unknown solution of the nonlinear partial differential equation is developed, provided that the latter solution is a semi convex function in the domain D. The Basic tools of this approach are fundamental notions of convex analysis such as the convex envelope and the discrete convex envelope of a given function. The numerical computation of the discrete convex envelope is carried out by the fast and effective "Quick hull Algorithm for Convex Hulls" (QHULL for short).

The approach developed in this thesis is applied to the numerical computation of the unknown solutions and their gradients of Hamilton–Jacobi equations, Scalar Conservation Laws and the Monge–Ampere equation.

The central steps of the proposed device can be stated as follows. At first step construct some uniform approximation of the unknown solution of the partial differential equation, say for example, through the classical finite difference method, further at the second step construct the discrete convex envelope of the latter uniform approximation and compute its gradient. Then the principal result of this thesis – the weighted reverse Poincare inequality guarantees that the computed gradient will be the L^2-approximation to the gradient of the unknown solution of the partial differential equation.

For all three differential equations corresponding test examples are considered and the errors of the uniform approximation of the exact solution and the errors of the L^2-approximation of the exact gradient are calculated.

The computer visualization of approximate and exact solutions and their corresponding gradients are also given for test examples.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

დეტერმინისტული და სტოქასტური სისტემების ოპტიმიზაციისა და ოპტიმალური მართვის ამოცანები ხშირად დაიყვანება არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნების ანალიზსა და მათ გამოთვლაზე.

არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები იშვიათად იხსნება ცხადი ანალიზური სახით და ამიტომ ძალზე აქტუალურია მათი ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდების განვითარება.

რეალური ოპტიმიზაციის ამოცანების გადასაწყვეტად სრულიად არასაკმარისია სათანადო დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნის მიახლოებითი გამოთვლა, ვინაიდან აუცილებელია ასევე ამონახსნის კერძო წარმოებულების მიახლოებითი გამოთვლა.

მაგალითისთვის განვიხილოთ დეტერმინისტული ოპტიმალური მართვის თეორიის კლასიკური ბოლცას ამოცანა სასრულ დროით $[0,T]$ ინტერვალზე (იხ. კანარსა და სინესტრარი [5, თავი 7]).

ცნობილია, რომ ამ ამოცანის ფასის $v(t,x)$, $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, ფუნქცია წარმოადგენს პირველი რიგის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ე. წ. ჰამილტონ–იაკობის განტოლების ამონახსნს მოცემული ფინალური (საბოლოო) მნიშვნელობით

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \max\limits_{u \in U} \Big\{ - f(x,u) \cdot \operatorname{grad} v(t,x) - L(x,u) \Big\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ v(T,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

აქ U არის u მართვათა სიმრავლე, $f(x,u)$ მართვადი სისტემის მამოძრავებელი ფუნქციაა, $L(x,u)$ – მიმდინარე დანახარჯების ფუნქცია, ხოლო $g(x)$ კი ფინალური დანახარჯების ფუნქცია და ბოლოს $\operatorname{grad} v(t,x)$ აღნიშნავს $v(t,x)$ ფუნქციის x ცვლადის მიმართ კერძოწარმოებულების ვექტორს

$$\operatorname{grad} v(t,x) = \Big(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_n} \Big). \tag{2}$$

$u = u(t,x)$ უკუკავშირის მქონე ოპტიმალური მართვა, ყოველი ფიქსირებული (t,x) წყვილისთვის, აიგება როგორც u მართვის ის მნიშვნელობა, რომელზეც მიიღწევა მაქ-

სიმუმი შემდეგ გამოსახულებაში

$$-f(x,u)\cdot \operatorname{grad} v(t,x) - L(x,u). \tag{3}$$

აქედან ვხედავთ, რომ $u = u(t,x)$ უკუკავშირის მქონე ოპტიმალური მართვის აგება მოითხოვს $\operatorname{grad} v(t,x)$ ვექტორ-ფუნქციის ცოდნას, ანდა მის მიახლოებით გამოთვლას.

ანალოგიური მდგომარეობაა რეალურ სტოქასტური მართვის ამოცანებში. მაგალითისთვის განვიხილოთ ფასიან ქაღალდთა ბაზარზე ოპტიმალური სავაჭრო პორტფელის აგების ამოცანა. იმ შემთხვევაში თუ ეს პორტფელი შეიცავს ამერიკული ტიპის ოფციონს, მაშინ ოპტიმალური სავაჭრო სტრატეგიის აგება მოითხოვს ამერიკული ოფციონის $v(t,x)$ ფასის ფუნქციის $\operatorname{grad} v(t,x)$ გრადიენტის ცოდნას, მაგრამ არც $v(t,x)$ ფუნქციისთვის და არც მისი გრადიენტისთვის არ არსებობს ცხადი ანალიზური სახის გამოსახულება. ეს არაა გასაკვირი, ვინაიდან $v(t,x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეორე რიგის არაწრფივ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებას (იხ. ელ კარო, ჟან ბლანკ-პიკი და შრივი [27]).

წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის მიზანია ზოგიერთი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის მისი უცნობი ამონახსნის გრადიენტის მიახლოებითი გამოთვლის ხერხის განვითარება. ჩვენი მიდგომის ამოსავალი წერტილია ის ფაქტი, რომ მრავალი ოპტიმიზაციის ამოცანის ფასის ფუნქცია ნახევრადჩაზნექილი ანდა ნახევრადამოზნექილი ფუნქციაა თავის განსაზღვრის არეში.

შეგახსენებთ, რომ $\mathbb{R}^n$ ევკლიდეს სივრცის ამოზნექილ D არეში განსაზღვრულ $v(x)$ ნამდვილმნიშვნელობებიან ფუნქციას ეწოდება ნახევრადჩაზნექილი $c \geq 0$ მუდმივით, თუ

$$v(x) - c\cdot\frac{|x|^2}{2} \tag{4}$$

ჩაზნექილი ფუნქციაა D არეში.

ინტერესი ნახევრადჩაზნექილი ფუნქციების მიმართ თავდაპირველად მოტივირებული იყო პირველი რიგის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების კვლევის შედეგად, ვინაიდან ეს იყო პირველი ფართო კლასი ფუნქციებისა, რომელშიაც დადგენილ იქნა განტოლების ამონახსნის გლობალური არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები.

სადღეისოდაც ეს კლასი ფუნქციებისა ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას ოპტიმიზაციის ამოცანების კვლევისას როგორც ამონახსნთა რეგულარულობის მაქსიმალური კლასი.

ჰამილტონ–იაკობის (1) განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს, გარკვეულ ბუნებრივ პირობებში, ლოკალურად ნახევრადჩაზნექილ ფუნქციას ერთობლივად (t,x) წყვილის მიმართ (იხ. კანარსა და სინესტრარი [5, თავი 7, თეორემა 7.4.11]).

მეორე რიგის ჰამილტონ–იაკობი–ბელმანის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის ნახევრადჩაზნექილობა სივრცითი $x \in \mathbb{R}^n$ ცვლადის მიმართ დადგენილ იქნა აიშიისა და ლიონსის მიერ (იხ. [1, თეორემა 7.3])

წმინდა ანალიზური მეთოდებით, თუმცა ამონახსნის ეს თვისება მანამდე აღმოჩენილ იქნა ალბათობის თეორიის მეთოდებით ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად კრილოვისა [3] და ლიონსის [4] მიერ.

გიგამ, გოტომ, აიშიიმ და სატომ [2] აღმოაჩინეს შესანიშნავი ფაქტი, რომ მეორე რიგის სავსებით არაწრფივი პარაბოლური კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის $\mathbb{R}^n$ ევკლიდეს სივრცეში ადგილი აქვს ამონახსნის საწყისი $t = 0$ მომენტიდან ჩაზნექილობის თვისების გადატანას დროის ნებისმიერ $t > 0$ მომენტზე სივრცითი $x \in \mathbb{R}^n$ ცვლადის მიმართ.

არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნის გრადიენტის მიახლოებითი გამოთვლის ჩვენი ხერხი ეყრდნობა ამონახსნის ნახევრადჩაზნექილობის (ანდა ნახევრადამოზნექილობის) თვისებისა და ამ სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში დამტკიცებული ახალი სახის ენერგეტიკული უტოლობის ერთდროულ გამოყენებას.

ჩვენი მიდგომის ცენტრალური იარაღია $\mathbb{R}^n$ სივრცის ამოზნექილ D არეზე განსაზღვრული $u(x)$ ფუნქციის $\Gamma u(x)$ ამოზნექილი მომვლები. ის განისაზღვრება როგორც ზედა ზღვარი (სუპრემუმი) ყველა ამოზნექილი ფუნქციისა, რომლებიც მაჟორირდებიან $u(x)$ ფუნქციით D არეზე.

იმისათვის, რომ ნათელი გახდეს ჩვენი მიდგომის ძირითადი იდეა, სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ მოცემული კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი $u(x)$ ამონახსნი ამოზნექილი ფუნქციაა $\mathbb{R}^n$ სივრცის რაიმე C კუბზე. იგულისხმება, რომ შესაძლებელია მისი $u_\delta(x)$ თანაბარი აპროქსიმაციის აგება და ჩვენი მიზანია უცნობი $\operatorname{grad} u(x)$ გრადიენტის მიახლოებითი გამოთვლა. თავდაპირველად C კუბზე ვაგებთ რაიმე $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადეს. ვთქვათ, დავყოფთ მას მცირე კუბებად, რომელთა დიამეტრი არ აღემატება δ-ს. მიღებულ $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადეზე, ანუ მცირე კუბების წვეროებზე ვიხილავთ $u_\delta(x)$ თანაბარ აპროქსიმაციას. ახლა ცენტრალური მომენტია $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადეზე განსაზღვრული $u_\delta(x)$ ფუნქციის მეშვეობით უცნობი $u(x)$ ფუნქციის დისკრეტული ამოზნექილი მომვლების $\Gamma_{M_\delta} u_\delta(x)$ ფუნქციის გამოთვლა (იხ. წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის პირველი თავის პარაგრაფი 1.1). ამ მიზნით ვიყენებთ სწრაფ კომპიუტერულ QHULL ალგორითმს (იხ. ბარბერი, დობკინი და ჰუჰდანპა [13]), რომელიც $\mathbb{R}^n$ ევკლიდეს სივრცის წერტილთა ნებისმიერი სასრული სიმრავლისთვის პოულობს მის ამოზნექილ გარსს, ხოლო $\Gamma_{M_\delta} u_\delta(x)$ დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები მიიღება როგორც ამ ამოზნექილი გარსის ``ქვედა საზღვარი'' (იხ. პარაგრაფი 1.1). აქ უნდა აღინიშნოს ის მნიშვნელოვანი ფაქტი, რომ, საზოგადოდ, ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები არ ჩაიწერება ცხადი ანალიზური გამოსახულებით და ამიტომ მისი მნიშვნელობების გამოთვლა არატრივიალური ამოცანაა. რაც შეეხება ფუნქციის დისკრეტულ ამოზნექილ მომვლებს იგი გამოთვლადია, მაგალითად, ზემოთ აღნიშნული QHULL ალგორითმით. საბედნიეროდ, ადგილი აქვს მათ თანაბარ სიახლოვეს (თეორემა 1.1.2), როცა ბადის δ პარამეტრი მცირეა. სწორედ ეს ფაქტი წარმოადგენს ჩვენი მეთოდის პრაქტიკული ღირებულების საფუძველს (რაც კარგად მოჩანს მეოთხე თავში განხილული მაგალითების

კომპიუტერული რეალიზაციისას).

$\Gamma_{M_\delta} u_\delta(x)$ დისკრეტული ამოზნექილი მომვლების გამოთვლის შემდეგ ვითვლით მის $\operatorname{grad}\Gamma_{M_\delta} u_\delta(x)$ გრადიენტს (სინამდვილეში MATLAB პროგრამაში განხორციელებული QHULL ალგორითმი ავტომატურად ითვლის აღნიშნულ გრადიენტს). და ბოლოს, სადისერტაციო ნაშრომის ერთ-ერთი ძირითადი დებულება ე. წ. ახალი სახის ენერგეტიკული უტოლობა (თეორემა 2.2.1) ასაბუთებს, რომ გამოთვლილი $\operatorname{grad}\Gamma_{M_\delta} u_\delta(x)$ გრადიენტი წარმოადგენს უცნობი $\operatorname{grad} u(x)$-ის L^2-მიახლოებას. ამასთან, იგივე უტოლობა ადგენს L^2-მიახლოების სიზუსტეს. სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავალის, ოთხი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისგან.

პირველი თავის პირველ პარაგრაფში განიხილება და შეისწავლება ამოზნექილი ანალიზის ისეთი ფუნდამენტალური ცნებები, როგორიცაა ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები და იმავე ფუნქციის დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები. თეორემა 1.1.2 ამ პარაგრაფის ძირითადი შედეგია, ის ადგენს კავშირს ამ ორ ცნებას შორის.

პირველი თავის მეორე პარაგრაფში მიღებულია ახალი სახის ენერგეტიკული უტოლობა (თეორემა 1.2.1) ერთი ცვლადის ორი ამოზნექილი ფუნქციის სხვაობისთვის.

მეორე თავში მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვის მტკიცდება ახალი სახის ენერგეტიკული უტოლობა (პუანკარეს წონიანი შებრუნებული უტოლობა) ორი ნახევრადამოზნექილი ფუნქციის სხვაობისთვის (თეორემა 2.2.1). როგორც ზემოთ იქნა აღნიშნული ამ შედეგზე დაყრდნობით განვითარებულია ნახევრადამოზნექილი ფუნქციის გრადიენტის L^2-აპროქსიმაციის ხერხი ფუნქციის ამოზნექილი მომვლების ცნების გამოყენებით (თეორემა 2.3.1).

მესამე თავში შესწავლილია მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი პარაბოლური კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების სუსტი სუბამონახსნები. მათთვის დასაბუთებულია სობოლევის გრადიენტის არსებობა და ინტეგრებადობა. ორი ნებისმიერი შემოსაზღვრული სუსტი სუბამონახსნის სხვაობისთვის დამტკიცებულია პუანკარეს წონიანი შებრუნებული უტოლობა (თეორემა 3.4.2).

მეოთხე თავში გადმოცემულია ჩვენი მიდგომის გამოყენება ზოგიერთი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის, კერძოდ, ჰამილტონ–იაკობის, სკალარული შენახვის კანონისა და მონჟ–ამპერის განტოლებებისათვის.

ჰამილტონ–იაკობის დიფერენციალური განტოლების უცნობი $u(x)$ ამონახსნის $u_\delta(x)$ თანაბარი აპროქსიმაციის ასაგებად ვიყენებთ გამოთვლითი ამოზნექილი ანალიზის სწრაფ და ეფექტურ ალგორითმებს, კერძოდ, ბრენიერისა [11] და ლუცეტის [12] მიერ აგებულ ე. წ. სწრაფ ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნას.

ცნობილია, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ჰამილტონ–იაკობის განტოლება კავშირშია ე. წ. სკალარული შენახვის კანონის განტოლებასთან. კერძოდ, ამ უკანასკნელის ამონახსნი მიიღება როგორც სათანადო ჰამილტონ–იაკობის განტოლების ამონახსნის წარმოებული x ცვლადით. აქედან გამომდინარე ჩვენი მიდგომა გვაძლევს საშუალებას სკალარული შენახვის კანონის განტოლების უცნობი ამონახსნის L^2-აპროქსიმაციის ამოცანა დავიყვანოთ შესაბამის ჰამილტონ–იაკობის კერძოწარმოებულებიანი დიფე-

რენციალური განტოლების ამონახსნის გრადიენტის L^2 აპროქსიმაციაზე.

მეოთხე თავში განხილულია აგრეთვე მეორე რიგის სავსებით არაწრფივი მონჟ–ამპერის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნისა და მისი გრადიენტის აპროქსიმაციის ამოცანა. ამონახსნის თანაბარი აპროქსიმაციის მიზნით გამოყენებულია კლასიკური სახის სასრულ-სხვაობიანი სქემა. ამონახსნის თანაბარი აპროქსიმაციიდან ვაგებთ სათანადო დისკრეტულ ამოზნექილ მომვლებს და ვითვლით მის გრადიენტს. მეორე თავში დამტკიცებული ენერგეტიკული უტოლობა გარანტირებს, რომ დისკრეტული ამოზნექილი მომვლების გრადიენტი წარმოადგენს მონჟ–ამპერის დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახნის გრადიენტის L^2-აპროქსიმაციას.

სამივე განტოლებისთვის განხილულია ტესტური მაგალითები და მათთვის დათვლილია ამონახსნთა L_∞ თანაბარი მიახლოებისა და შესაბამისი გრადიენტების L^2-მიახლოების ცდომილობები.

MATLAB კომპიუტერული პროგრამის მეშვეობით მოცემულია აღნიშნული განტოლებების ამონახსნებისა და მათი გრადიენტების (კერძო წარმოებულების) კომპიუტერული ვიზუალიზაცია.

თავი 1

მრავალი ცვლადის ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები. ენერგეტიკული უტოლობა ერთი ცვლადის ამოზნექილი ფუნქციების სხვაობისთვის

1.1 ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები და მისი დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები

ევკლიდეს n-განზომილებიან $\mathbb{R}^n$ სივრცეში განვიხილოთ რაიმე P პოლიტოპი, რომელიც განმარტებით (იხ. როკფელერი [9, პარაგრაფი 5]) $\mathbb{R}^n$-ის წერტილთა სასრული სიმრავლის ამოზნექილ გარსს წარმოადგენს.

ვთქვათ, $f : P \to \mathbb{R}$ არის P პოლიტოპზე განსაზღვრული n ცვლადის ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქცია.

განსაზღვრება 1.1.1. $f : P \to \mathbb{R}$ ფუნქციის $\Gamma f(x)$ ამოზნექილი მომვლები ეწოდება მაქსიმალურ ამოზნექილ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია P პოლიტოპზე და მაჟორირდება $f(x)$, $x \in P$, ფუნქციით

$$\Gamma f(x) = \sup\Big\{\varphi(x) :\ \varphi(x) \text{ ამოზნექილია } P\text{-ზე და } \varphi(x) \le f(x),\ x \in P\Big\}. \quad (1.1.1)$$

განვიხილოთ ახლა P პოლიტოპის წერტილთა რაიმე $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ სასრული ქვესიმრავლე და ვიგულისხმოთ, რომ $\operatorname{conv} M = P$ (ანუ M სიმრავლე შეიცავს P პოლიტოპის წვეროებს), სადაც $\operatorname{conv} M$-ით აღინიშნება მინიმალური ამოზნექილი სიმრავლე, რომელიც მოიცავს M-ს და ეწოდება M სიმრავლის ამოზნექილი გარსი.

განსაზღვრება 1.1.2. $f : P \to \mathbb{R}$ ფუნქციის სასრული M სიმრავლის შესაბამისი დისკრეტული ამოზნექილი $\Gamma_M f(x)$ მომვლები ვუწოდოთ P პოლიტოპზე განსაზღვრულ მაქსიმალურ ამოზნექილ ფუნქციას, რომელიც M სიმრავლის წერტილებში მაჟორირდება მოცემული $f(x)$ ფუნქციით

$$\Gamma_M f(x) = \sup \Big\{ \varphi(x) : \ \varphi(x) \text{ ამოზნექილია } P\text{-ზე და } \varphi(x_k) \le f(x_k), \ x_k \in M \Big\}. \quad (1.1.2)$$

ანალიზური სახით მოცემული $f(x)$, $x \in P$, ფუნქციისთვის მისი $\Gamma f(x)$ ამოზნექილი მომვლების ანალიზური სახით ჩაწერა შესაძლებელია იშვიათ შემთხვევებში, როდესაც სივრცის n განზომილება მეტია ან ტოლია 2-ის, $n \ge 2$. ამიტომ ძალზე აქტუალურია ამოზნექილი $\Gamma f(x)$ მომვლების მიახლოებითი გამოთვლა. ამასთან, წინამდებარე დისერტაციის მიზნებისთვის საჭიროა არა მხოლოდ მისი თანაბარი აპროქსიმაციის აგება, არამედ, ამოზნექილი თანაბარი აპროქსიმაციის აგება სათანადო ალგორითმის მეშვეობით. სწორედ ამ მიზნით გამოვიყენებთ ამოზნექილი ანალიზის ფუნდამენტალურ იდეას, რომლის მიხედვით $\mathbb{R}^n$-ში ამოზნექილი ფუნქციების აგება შესაძლებელია $\mathbb{R}^{n+1}$ ევკლიდეს სივრცეში სათანადო ამოზნექილი სიმრავლეების მეშვეობით, კერძოდ, თუ F კომპაქტური ამოზნექილი სიმრავლეა $\mathbb{R}^{n+1}$-ში, მაშინ

$$f(x) = \inf \{ \mu : \ (x, \mu) \in F \} \quad (1.1.3)$$

იქნება ამოზნექილი ფუნქცია F-ის პროექციაზე $Q = \operatorname{Proj} F$, რომელიც $\mathbb{R}^n$-ის კომპაქტური ამოზნექილი სიმრავლეა (იხ. როკფელერი [9, პარაგრაფი 5]).

ამრიგად, გადავინაცვლოთ $(n+1)$-განზომილებიან $\mathbb{R}^{n+1}$ ევკლიდეს სივრცეში და განვიხილოთ სასრული სიმრავლე

$$(x_i, f(x_i)), \ \ i = 1, \dots, m \quad (1.1.4)$$

და მისი

$$\widehat{P} = \operatorname{conv} \{ (x_i, f(x_i)), \ i = 1, \dots, m \} \quad (1.1.5)$$

ამოზნექილი გარსი.

$\mathbb{R}^{n+1}$ სივრცის $\widehat{P}$ პოლიტოპის მეშვეობით (1.1.3) ფორმულის მიხედვით შემოვიყვანოთ შემდეგი ფუნქცია

$$\begin{aligned} G_M f(x) &= \inf \{ \mu : \ (x, \mu) \in \widehat{P} \} = \\ &= \inf \Big\{ \mu : (x, \mu) \in \operatorname{conv} \{ (x_i, f(x_i)), \ i = 1, \dots, m \} \Big\}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

შევნიშნოთ, რომ $\widehat{P}$ პოლიტოპი არის კომპაქტური სიმრავლე და ამიტომ (1.1.6) განმარტებაში ინფიმუმი მიიღწევა და, მაშასადამე, ამოზნექილი $G_M f(x)$ ფუნქციის $(x, G_M f(x))$ გრაფიკი წარმოადგენს $\widehat{P}$ პოლიტოპის ანუ ამოზნექილი გარსის $\operatorname{conv} \{ (x_i, f(x_i)), \ i = 1, \dots, m \}$ ``ქვედა საზღვარს''.

ადგილი აქვს შემდეგ შესანიშნავ მათემატიკურ დებულებას, რომელიც $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი n განზომილებისთვის საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ $f(x)$, $x \in P$, ფუნქციის დისკრეტული $\Gamma_M f(x)$ ამოზნექილი მომვლები.

თ ე ო რ ე მ ა 1.1.1 (როკფელერი [9, პარაგრაფი 5, თეორემა 5.6 და მისი შედეგი]). *სამართლიანია ტოლობა*

$$\Gamma_M f(x) = G_M f(x), \quad x \in P. \tag{1.1.7}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დავაფიქსიროთ $x \in P$. გვაქვს

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i, \ \text{ სადაც } \ x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, m, \ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1. \tag{1.1.8}$$

იგივე $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$-თვის განვიხილოთ $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, m$, წერტილთა ამოზნექილი კომბინაცია

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (x_i, f(x_i)) = (x, \mu), \ \text{ სადაც } \ \mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f(x_i). \tag{1.1.9}$$

ცხადია, $(x, \mu) \in \widehat{P}$, ე. ი. $\{\mu : (x, \mu) \in \widehat{P}\}$ სიმრავლე არაცარიელია და, მაშასადამე, $G_M f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია.

ავიღოთ ნებისმიერი μ ისეთი, რომ $(x, \mu) \in \widehat{P}$. ამოზნექილი გარსის განმარტების ძალით, არსებობს ისეთი $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, რომ $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, და

$$(x, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (x_i, f(x_i)) = \Big(x, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f(x_i)\Big),$$

ანუ

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f(x_i). \tag{1.1.10}$$

განვიხილოთ P პოლიტოპზე ასევე ნებისმიერი $\varphi(x)$ ამოზნექილი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\varphi(x_i) \leq f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.1.11}$$

გვაქვს

$$\varphi(x) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \varphi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f(x_i) = \mu.$$

მაშასადამე, $G_M f(x)$ ფუნქციის განმარტების ძალით ვღებულობთ

$$\varphi(x) \leq G_M f(x), \tag{1.1.12}$$

აქედან კი, თავის მხრივ,

$$\Gamma_M f(x) \leq G_M f(x), \quad x \in P. \tag{1.1.13}$$

განვიხილოთ $G_M f(x)$ ფუნქცია. გვაქვს

$$(x_i, f(x_i)) \in \widehat{P},$$

მაშასადამე,

$$G_M f(x_i) \leq f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.1.14}$$

ანუ $G_M f(x)$ გამოდის ამოზნექილი ფუნქცია, რომელიც x_i, $i = 1, \ldots, m$, წერტილებში აკმაყოფილებს (1.1.14) პირობას.

დისკრეტული ამოზნექილი $\Gamma_M f(x)$ მომვლების განმარტების გამო ვასკვნით, რომ

$$G_M f(x) \leq \Gamma_M f(x), \quad x \in P. \tag{1.1.15}$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ სასურველ ტოლობას

$$\Gamma_M f(x) = G_M f(x), \quad x \in P. \quad \square \tag{1.1.16}$$

დამტკიცებული თეორემიდან ვასკვნით, რომ $f(x)$, $x \in P$, ფუნქციის დისკრეტული ამოზნექილი $\Gamma_M f(x)$ მომვლების გამოთვლა დაიყვანება ამოზნექილი $\operatorname{conv}\{(x_i, f(x_i)),\ i = 1, \ldots, m\}$ გარსისა და მისი ``ქვედა საზღვრის'' გამოთვლაზე. მოცემულ სასრულ წერტილთა სიმრავლის ამოზნექილი გარსის პოვნა (გამოთვლა) წარმოადგენს კომპიუტერული გეომეტრიის ერთ-ერთ ცენტრალურ ამოცანას. არსებობს არა ერთი ალგორითმი მის გამოსათვლელად, მათ შორის ძალზედ პოპულარული QHULL ალგორითმი: იგი შემუშავებულია 1996 წელს ამერიკელი მეცნიერების ბარბერის, დობკინისა და ჰუჰდანპას მიერ (იხ. [13]). ეს ალგორითმი ძალზე ეფექტურია და საკმარისად სწრაფია, როცა $\mathbb{R}^n$ სივრცის n განზომილება აკმაყოფილებს $n \leq 4$ პირობას. მაშასადამე, QHULL აგებს $(n+1)$-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში სასრულ წერტილთა სიმრავლის ამოზნექილ გარსს და შემდგომ კი მის ``ქვედა საზღვარს'' ანუ პოულობს დისკრეტული ამოზნექილი $\Gamma_M f(x) = G_M f(x)$ მომვლების მნიშვნელობებს $P$ პოლიტოპზე. მაშასადამე, დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები გამოთვლადია, მაშინ, როდესაც $n \geq 2$ განზომილებისთვის ``უწყვეტი'' ამოზნექილი $\Gamma_M f(x)$ მომვლები, საზოგადოდ, არაა გამოთვლადი.

აქვე შევნიშნოთ $\mathbb{R}^n$-ში კომპაქტურ ამოზნექილ სიმრავლეთა მნიშვნელოვანი თვისება: ნებისმიერი კომპაქტური ამოზნექილი Q სიმრავლე შიგნიდან აპროქსიმირებადია სათანადო P პოლიტოპის მეშვეობით.

ახლა ისმის ცენტრალური კითხვა: შესაძლებელია თუ არა $\mathbb{R}^n$ სივრცის P პოლიტოპზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ამოზნექილი $\Gamma f(x)$ მომვლების თანაბარი აპროქსიმაცია სათანადო სასრული სიმრავლეებით განსაზღვრული დისკრეტული ამოზნექილი მომვლებით?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად დაგვჭირდება P პოლიტოპზე განსაზღვრული $(M_\delta)_{\delta>0}$-ბადის ცნების შემოყვანა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1.3. ვიტყვით, რომ P პოლიტოპის სასრულ ქვესიმრავლეთა სისტემა $(M_\delta)_{\delta>0}$ ქმნის ბადეს, თუ სრულდება ორი პირობა

(1) $\forall\,\delta > 0$ გვაქვს $\operatorname{conv} M_\delta = P$, ანუ ყოველი M_δ შეიცავს P პოლიტოპის წვეროებს;

(2) $\forall\,x \in P$ და $\forall\,\delta > 0$ არსებობს $(n+1)$ ცალი წერტილი $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+1}} \in M_\delta$ ისეთი, რომ x წარმოდგება ამ წერტილების ამოზნექილი კომბინაციით:

$$\begin{gathered} x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot x_{i_k}, \ \text{ სადაც } \ \lambda_k \ge 0, \ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1, \\ \text{და } \ |x - x_{i_k}| \le \delta, \ \ k = 1, \dots, n+1. \end{gathered} \tag{1.1.17}$$

ვაჩვენოთ, რომ ასეთი $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადე ყოველთვის არსებობს. მართლაც, P პოლიტოპი კომპაქტური სიმრავლეა. ავიღოთ C კუბი, რომელიც მას მოიცავს

$$P \subseteq C. \tag{1.1.18}$$

ავიღოთ $\delta > 0$ ნებისმიერად მცირე და C კუბი დავყოთ მცირე იდენტურ $C_j(\delta)$, $j = 1, \dots, \ell(\delta)$, კუბებად, რომელთა დიამეტრი ნაკლებია δ-ზე, $\operatorname{diam} C_j(\delta) < \delta$, $j = 1, \dots, \ell(\delta)$. გვაქვს

$$P = P \cap C = \bigcup_{j=1}^{\ell(\delta)} (P \cap C_j(\delta)). \tag{1.1.19}$$

ყოველი $P \cap C_j(\delta)$ თანაკვეთა წარმოადგენს პოლიტოპს, რომლის დიამეტრი ნაკლებია δ-ზე. განვიხილოთ ამ პოლიტოპთა ყველა წვეროს სიმრავლე

$$M_\delta = \big\{x_1(\delta), \dots, x_{m(\delta)}(\delta)\big\}. \tag{1.1.20}$$

ავიღოთ ნებისმიერი $x \in P$, მაშინ ის ეკუთვნის ერთ-ერთ $P \cap C_j(\delta)$ პოლიტოპს მაინც. მაგრამ ყოველი პოლიტოპი თავისი წვეროების ამოზნექილი გარსია და ამიტომ

$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot x_{i_k}(\delta).$$

კარათეოდორის ცნობილი თეორემის თანახმად (იხ. როკფელერი [9, პარაგრაფი 17]), ყოველთვის შეგვიძლია შემოვისაზღვროთ არა უმეტეს $(n+1)$ წვეროთი და, მაშასადამე, გვაქვს

$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot x_{i_k}(\delta), \ \text{ სადაც } \ \lambda_k \ge 0, \ \ k = 1, \dots, n+1, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \\ \text{და რაც მთავარია } \ |x - x_{i_k}| \le \delta, \ \ k = 1, \dots, n+1. \end{cases} \tag{1.1.21}$$

მაშასადამე, P პოლიტოპის სასრულ ქვესიმრავლეთა სისტემა $(M_\delta)_{\delta>0}$ ქმნის ბადეს.

ევკლიდეს $\mathbb{R}^n$ სივრცის P პოლიტოპზე განვიხილოთ უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. ეს ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია P სიმრავლეზე, რადგან P პოლიტოპი კომპაქტური სიმრავლეა. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის $w(f,t)$, $t \geq 0$ მოდული, რაც ნიშნავს, რომ

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega\big(f, |y-x|\big), \quad \text{როცა} \;\; x, y \in P, \tag{1.1.22}$$

სადაც $w(f,t)_{t\geq 0}$ არის t არგუმენტის უწყვეტი არაკლებადი ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\lim_{t\downarrow 0} w(f,t) = w(f,0) = 0 \tag{1.1.23}$$

(შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას L მუდმივით, მაშინ $w(f,t) = L \cdot t$.)

დავუშვათ, რომ შესაძლებელია $f(x)$ ფუნქციის თანაბარი აპროქსიმაცია $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადეზე რაიმე $f_\delta(x)$ ფუნქციით, რაც ნიშნავს იმას, რომ არსებობს უწყვეტი არაკლებადი ერთი ცვლადის $\rho(t)$, $t \geq 0$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\lim\limits_{t\downarrow 0} \rho(t) = \rho(0) = 0$ და სრულდება შემდეგი პირობა

$$\sup_{x_k \in M_\delta} \big|f_\delta(x_k) - f(x_k)\big| \leq \rho(\delta), \quad \forall\, \delta > 0. \tag{1.1.24}$$

თუ ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის ანალიზური სახე, მაშინ $f_\delta(x)$ ფუნქციების არჩევა ტრივიალურია, უბრალოდ ვუშვებთ, რომ $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადეზე $f_\delta(x) = f(x)$, $\forall\, \delta > 0$, ანუ

$$f_\delta(x_k) = f(x_k), \quad x_k \in M_\delta \tag{1.1.25}$$

და ამ შემთხვევაში $\rho(t) = 0$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქციის ანალიზური სახე უცნობია (ვთქვათ, $f(x)$ არის რაიმე არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნი) ვუშვებთ, რომ შესაძლებელია მისი აპროქსიმაცია $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადის წერტილებში.

განვიხილოთ $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადეზე $f(x)$ ფუნქციის შემდეგი დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) = \sup\Big\{\varphi(x) : \; \varphi(x) \text{ ამოზნექილია } P\text{-ზე და} \\ \varphi(x_k) \leq f_\delta(x_k), \; x_k \in M_\delta\Big\}. \tag{1.1.26}$$

შევნიშნოთ, რომ (1.1.26) განმარტებაში $f(x_k)$-ს ნაცვლად მონაწილეობს $f_\delta(x_k)$ და რომ ამოზნექილი $\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x)$ ფუნქცია გამოთვლადია. მართლაც, $(n+1)$-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში ვიხილავთ წერტილთა სასრულ სიმრავლეს

$$(x_k, f_\delta(x_k)), \quad x_k \in M_\delta. \tag{1.1.27}$$

QHULL ალგორითმის მეშვეობით ვაგებთ მის ამოზნექილ გარსს

$$\operatorname{conv}\Big\{(x_k, f_\delta(x_k)),\ x_k \in M_\delta\Big\}. \tag{1.1.28}$$

და, საბოლოოდ, ვპოულობთ მის ``ქვედა საზღვარს''

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) = \inf\Big\{\mu : (x,\mu) \in \operatorname{conv}\big\{(x_k, f_\delta(x_k)),\ x_k \in M_\delta\big\}\Big\}. \tag{1.1.29}$$

სწორედ ეს ალგორითმი გამოიყენება სადისერტაციო ნაშრომის IV თავში ზოგიერთი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების უცნობი ამონახსნისა (რომელიც თვითონ ამოზნექილი ფუნქციაა) და მისი გრადიენტის აპროქსიმაციისთვის.

ახლა ჩვენი მიზანია პასუხი გავცეთ ამ პარაგრაფის ცენტრალურ კითხვას ამოზნექილი $\Gamma f(x)$ მომვლების შესაძლო აპროქსიმაციის თაობაზე.

შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება წარმოადგენს აგუილერა, ფორზანისა და მორინის [32] თეორემა 1-ის განზოგადებას P პოლიტოპზე განსაზღვრული ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისთვის, მაშინ როცა აღნიშნული ავტორები განიხილავენ კერძო შემთხვევას, როდესაც $f(x)$ ამოზნექილი ფუნქციაა და აკმაყოფილებს ლიფშიცის გლობალურ პირობას რაიმე L მუდმივით P პოლიტოპზე.

თ ე ო რ ე მ ა 1.1.2. *ევკლიდეს $\mathbb{R}^n$ სივრცის P პოლიტოპზე განვიხილოთ რაიმე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, $f : P \to \mathbb{R}$ და $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადე. მაშინ ადგილი აქვს ამოზნექილი $\Gamma f(x)$ მომვლების შემდეგ თანაბარ აპროქსიმაციას გამოთვლადი ამოზნექილი $\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x)$ ფუნქციებით:*

$$\sup_{x\in P}\big|\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) - \Gamma f(x)\big| \le w(f,\delta) + \rho(\delta), \quad \delta > 0, \tag{1.1.30}$$

სადაც $w(f,\delta)$ არის $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული, ხოლო $\rho(\delta)$ განისაზღვრება (1.1.24) *თანაფარდობიდან.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $x \in P$. $(M_\delta)_{\delta>0}$ ბადის განმარტების ძალით x წარმოდგება შემდეგი ამოზნექილი კომბინაციის სახით

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot x_{i_k}, \quad x_{i_k} \in M_\delta, \ \text{ სადაც } \ \lambda_k \ge 0, \quad k = 1,\dots,n+1,$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \ \text{ და } \ |x - x_{i_k}| \le \delta, \quad k = 1,\dots,n+1.$$

დისკრეტული ამოზნექილი $\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x)$ მომვლების (1.1.26) განმარტების ძალით გვაქვს

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) = \Gamma_{M_\delta} f_\delta\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot x_{i_k}\Big) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot \Gamma_{M_\delta} f_\delta(x_{i_k}) \le \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot f_\delta(x_{i_k}). \tag{1.1.31}$$

$f_\delta(x_{i_k})$ გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$f_\delta(x_{i_k}) = \big(f_\delta(x_{i_k}) - f(x_{i_k})\big) + \big(f(x_{i_k}) - f(x)\big) + f(x),$$

საიდანაც

$$f_\delta(x_{i_k}) \le \rho(\delta) + w(f,\delta) + f(x),$$

აქედან კი (1.1.31) უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) \le \rho(\delta) + w(f,\delta) + f(x),$$

ანუ

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) - \big(\rho(\delta) + w(f,\delta)\big) \le f(x). \tag{1.1.32}$$

ბოლო უტოლობის მარცხენა მხარეს გვაქვს ამოზნექილი ფუნქცია, რომელიც მაჟორირდება $f(x)$ ფუნქციით და ამიტომ მაჟორირდება აგრეთვე $\Gamma f(x)$ ამოზნექილი მომვლებით, ე. ი.

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) - \big(w(f,\delta) + \rho(\delta)\big) \le \Gamma f(x),$$

სხვანაირად ვღებულობთ

$$\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) - \Gamma f(x) \le w(f,\delta) + \rho(\delta).$$

მეორეს მხრივ, $\Gamma f(x) \le f(x)$, აქედან კი

$$\Gamma f(x_k) \le f(x_k), \quad x_k \in M_\delta. \tag{1.1.33}$$

გვაქვს

$$f(x_k) = f(x_k) - f_\delta(x_k) + f_\delta(x_k) \le \rho(\delta) + f_\delta(x_k).$$

(1.1.33) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\Gamma f(x_k) \le \rho(\delta) + f_\delta(x_k),$$

ანუ

$$\Gamma f(x_k) - \rho(\delta) \le f_\delta(x_k), \quad x_k \in M_\delta. \tag{1.1.34}$$

მივიღეთ რომ ამოზნექილი ფუნქცია $\Gamma f(x) - \rho(\delta)$ ბადის წერტილებში მაჟორირდება $f_\delta(x)$ ფუნქციიით. დისკრეტული ამოზნექილი მომვლების $\Gamma_{M_\delta} f_\delta(x)$ განმარტების ძალით ვასკვნით, რომ

$$\Gamma f(x) - \rho(\delta) \le \Gamma_{M_\delta} f_\delta(x), \quad x \in P.$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ სასურველ თანაბარ შეფასებას

$$-\rho(\delta) \le \Gamma_{M_\delta} f_\delta(x) - \Gamma f(x) \le w(f,\delta) + \rho(\delta), \quad x \in P. \quad \square \tag{1.1.35}$$

1.2 ერთი ცვლადის უცნობი ამოზნექილი ფუნქციის წარმოებულის აპროქსიმაცია მისი თანაბარი აპროქსიმაციის მეშვეობით

შემოსაზღვრულ $[a,b]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ამოზნექილი $f(x)$ ფუნქცია, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, და ვიგულისხმოთ, რომ უცნობია მისი ანალიზური სახე. ამასთან შესაძლებელია მისი თანაბარი $f_\delta(x)$ აპროქსიმაციის აგება, სადაც δ მცირე პარამეტრია, მაგალითად, $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის ბიჯი. ჩვენი მიზანია უცნობი $f(x)$ ფუნქციის უცნობი მარცხენა წარმოებულის $f'(x-)$ აპროქსიმაცია ცნობილი $f_\delta(x)$ ფუნქციიდან რაიმე ფუნქციონალური გარდაქმნის მეშვეობით. ამ მიზნით განვიხილავთ $f_\delta(x)$ ფუნქციის ამოზნექილ $\Gamma f_\delta(x)$ მომვლებს. გეომეტრიული თვალსაზრისით ის წარმოადგენს $f_\delta(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე ქვემოდან მოჭიმულ ძაფს. ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ განვიხილოთ $(\Gamma f_\delta)'(x-)$. როგორც $f'(x-)$ უცნობი ფუნქციის მიახლოება. აღნიშნული მიახლოებითი მეთოდის დასაბუთება წარმოადგენს ამ პარაგრაფის მთავარ მიზანს.

ასეთი სახის პრობლემები ბუნებრივად წარმოიშვება რეალური ამოცანების შესწავლისას. მაგალითისთვის განვიხილოთ ამერიკული ოფციონის ჰეჯირების ამოცანა ფინანსურ ბაზარზე. კარგადაა ცნობილი, რომ არ არსებობს ცხადი ანალიზური სახის ფორმულა ამერიკული ოფციონის $v(t,x)$ ფასის ფუნქციისთვის, მაგრამ შესაძლებელია მისი $v_\delta(t,x)$ თანაბარი აპროქსიმაციის აგება დისკრეტული მარკოვის ჯაჭვების მეშვეობით (იხ. კუშნერი [26]). იმისთვის, რომ მოვახდინოთ ამერიკული ოფციონის ჰეჯირება დროის t_k დისკრეტულ მომენტებში აუცილებელია ხელთ გვქონდეს $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ კერძო წარმოებულის რაიმე მიახლოება. ამასთან ცნობილია, რომ $v(t,x)$ ფასის ფუნქცია ამოზნექილია სივრცითი x ცვლადის მიმართ დროის ყოველი ფიქსირებული t მომენტისთვის (იხ., მაგალითად, ელ-კარო, ჟან ბლანკ–პიკი და შრივი [27]).

ჰეჯირების პრობლემისადმი ჩვენი მიდგომა მდგომარეობს შემდეგში: დროის ყოველი t_k მომენტისთვის განვიხილოთ $v_\delta(t_k,x)$ ფუნქციის ამოზნექილი $\Gamma v_\delta(t_k,x)$ მომვლები და მისი მარცხენა $(\Gamma v_\delta)'(t_k,x-)$ წარმოებული გამოვაცხადოთ უცნობი $\frac{\partial v(t_k,x)}{\partial x}$ კერძო წარმობულის მიახლოებად. ამ გზით მოვახდენთ ოპტიმალური სავაჭრო სტრატეგიაჰეჯის აპროქსიმაციას.

განვიხილოთ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამოზნექილი $f(x)$ ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე. კარგად არის ცნობილი, რომ (a,b) ინტერვალზე ის უწყვეტია, ხოლო ინტერვალის ბოლო a და b წერტილებზე მას აქვს სასრული $f(a+)$ და $f(b-)$ ზღვრები. უფრო მეტიც, მას აქვს სასრული მარცხენა და მარჯვენა $f'(x-)$ და $f'(x+)$ წარმოებულები (a,b) ინტერვალზე (იხ. შვარცი [28, p. 205]).

ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ ქვემოთ მოყვანილ უტოლობას, რომელიც ეხება ამოზნექილ $f(x)$ ფუნქციას და მის $f'(x-)$ მარცხენა წარმოებულს (იხ. შვარცი [28, p. 205])

$$f'(x_1-)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2-) \tag{1.2.1}$$

ნებისმიერი x_1 და x_2-თვის $a < x_1 < x_2 < b$.

თუ x_2-ს მივასწრაფებთ b-კენ, მივიღებთ

$$f'(x_1-) \leq \frac{f(b-) - f(x_1)}{b - x_1}, \tag{1.2.2}$$

ხოლო თუ x_1-ს მივასწრაფებთ a-კენ, გვექნება

$$\frac{f(x_2) - f(a+)}{x_2 - a} \leq f'(x_2-). \tag{1.2.3}$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\frac{f(x) - f(a+)}{x - a} \leq f'(x-) \leq \frac{f(b-) - f(x)}{b - x}, \text{ როცა } a < x < b. \tag{1.2.4}$$

თუ უკანასკნელ უტოლობას გავამრავლებთ $(x - a)(b - x)$-ზე, მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან შეფასებას:

$$\begin{aligned} (b - x)\big(f(x) - f(a+)\big) \leq (x - a)(b - x)f'(x-) \leq \\ \leq (x - a)\big(f(b-) - f(x)\big), \text{ როცა } a < x < b. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

ამ შეფასებიდან ვხედავთ, რომ

$$w_1(x) = (x - a)(b - x)f'(x-)$$

ფუნქცია შემოსაზღვრულია (a, b) ინტერვალზე, ამასთან

$$w_1(a+) = 0, \quad w_1(b-) = 0,$$

აღნიშნულის გათვალისწინებით განვსაზღვროთ $w_1(x)$ ფუნქცია ინტერვალის ბოლოებზე შემდეგნაირად

$$w_1(a) = 0, \quad w_1(b) = 0.$$

მაშასადამე, ვღებულობთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ შემოსაზღვრულ მარცხნიდან უწყვეტ და მარჯვნიდან ზღვრების მქონე $w_1(x)$ ფუნქციას. განსხვავებული შემოსაზღვრული ამოზნექილი $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის ანალოგიურად შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$w_2(x) = (x - a)(b - x)\varphi'(x-), \text{ როცა } a \leq x \leq b. \tag{1.2.6}$$

საბოლოოდ, შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$\begin{aligned} w(x) = w_1(x) - w_2(x) = \\ = (x - a)(b - x)\big(f'(x-) - \varphi'(x-)\big), \text{ როცა } a \leq x \leq b. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

შევნიშნოთ, რომ $w(x)$ არის შემოსაზღვრული, მარცხნიდან უწყვეტი (მარჯვნიდან ზღვრების მქონე) და აკმაყოფილებს პირობას:

$$w(a) = 0, \quad w(b) = 0.$$

ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია შევაფასოთ რიმანის $\int\limits_a^b w^2(x)\,dx$ ინტეგრალი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს მოვახდინოთ უცნობი ამოზნექილი ფუნქციის წარმოებულის აპროქსიმაცია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.2.1. *ვთქვათ, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორი ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამოზნექილი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ენერგეტიკულ შეფასებას:*

$$\int\limits_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x-)-\varphi'(x-)\big)^2\,dx \le$$
$$\le \frac{8}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot \sup_{x\in(a,b)}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\sup_{x\in(a,b)}\big|f(x)+\varphi(x)\big|(b-a)^3+$$
$$+\frac{4}{3}\Big(\sup_{x\in(a,b)}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\Big)^2(b-a)^3. \quad (1.2.8)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . დამტკიცება დავყოთ ორ ეტაპად: ჯერ ვასაბუთებთ მის სამართლიანობას ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი გლუვი ამოზნექილი ფუნქციებისთვის, ხოლო შემდგომ ვახდენთ ნებისმიერი ამოზნექილი ფუნქციის მიახლოებას გლუვი, ამოზნექილი ფუნქციებით და გადავდივართ ზღვარზე უკვე მიღებულ შედეგში.

ამგვარად, პირველ ეტაპზე ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ამოზნექილი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$f''(x)\ge 0,\quad \varphi''(x)\ge 0,\ \ a<x<b.$$

შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციები

$$u(x)=f(x)-\varphi(x),\quad v(x)=(x-a)^2(b-x)^2\big(f(x)-\varphi(x)\big). \quad (1.2.9)$$

განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალი და გამოვიყენოთ მასში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx = u'(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u''(x)\,dx =$$
$$= -\int\limits_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f(x)-\varphi(x)\big)\big(f''(x)-\varphi''(x)\big)\,dx, \quad (1.2.10)$$

სადაც $v(a)=v(b)=0$.

აქედან ვღებულობთ შეფასებას

$$\Big|\int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx\Big| \le$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\int\limits_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big|f''(x)-\varphi''(x)\big|\,dx, \tag{1.2.11}$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\big|f''(x)-\varphi''(x)\big| \le f''(x)+\varphi''(x) \tag{1.2.12}$$

და შედეგად ვღებულობთ

$$\Big|\int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx\Big| \le$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\int\limits_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f''(x)+\varphi''(x)\big)\,dx. \tag{1.2.13}$$

უტოლობას. შემდგომ გარდავქმნათ ინტეგრალი

$$\int\limits_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f''(x)+\varphi''(x)\big)\,dx =$$

$$= (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)+\varphi'(x)\big)\Big|_a^b -$$

$$-\int\limits_a^b \big((x-a)^2(b-x)^2\big)'\big(f'(x)+\varphi'(x)\big)\,dx =$$

$$= -\int\limits_a^b 2(x-a)(b-x)(-2x+a+b)\big(f'(x)+\varphi'(x)\big)\,dx =$$

$$= -2(x-a)(b-x)(-2x+a+b)\big(f(x)+\varphi(x)\big)\Big|_a^b +$$

$$+\int\limits_a^b \big(2(x-a)(b-x)(-2x+a+b)\big)'\big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx. \tag{1.2.14}$$

მაშასადამე,

$$\int\limits_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f''(x)+\varphi''(x)\big)\,dx \le$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)+\varphi(x)\big|\int\limits_a^b \Big|\big(2(x-a)(b-x)(-2x+a+b)\big)'\Big|\,dx. \tag{1.2.15}$$

ბოლო ინტეგრალის გამოთვლის შედეგად ვღებულობთ

$$\int_a^b \Big|\big(2(x-a)(b-x)(-2x+a+b)\big)'\Big|\,dx = \frac{4}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot(b-a)^3. \tag{1.2.16}$$

ამრიგად, ვღებულობთ შეფასებას

$$\Big|\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx\Big| \le$$
$$\le \frac{4}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot\sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\cdot\sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)+\varphi(x)\big|\cdot(b-a)^3. \tag{1.2.17}$$

მეორეს მხრივ,

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b \big(f'(x)-\varphi'(x)\big)\big[(x-a)^2(b-x)^2\big(f(x)-\varphi(x)\big)\big]'\,dx =$$
$$= 2\int_a^b (x-a)(b-x)(-2x+a+b)\big(f(x)-\varphi(x)\big)\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)\,dx+$$
$$+\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)^2\,dx. \tag{1.2.18}$$

ამრიგად, ვღებულობთ ტოლობას

$$\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)^2\,dx =$$
$$= \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx - \int_a^b (x-a)(b-x)\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)\times$$
$$\times\, 2(-2x+a+b)\big(f(x)-\varphi(x)\big)\,dx, \tag{1.2.19}$$

ვინაიდან

$$\int_a^b (-2x+a+b)^2\,dx = \frac{1}{3}\,(b-a)^3,$$

შეგვიძლია შევაფასოთ ბოლო წევრი

$$\left|\int_a^b (x-a)(b-x)\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)2(-2x+a+b)\big(f(x)-\varphi(x)\big)\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)^2\,dx +$$

$$+\,2\int_a^b (-2x+a+b)^2\big(f(x)-\varphi(x)\big)^2\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)^2\,dx +$$

$$+\,2\big(\sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\big)^2\frac{1}{3}(b-a)^3, \quad (1.2.20)$$

მაშასადამე, გვაქვს

$$\left|\int_a^b (x-a)(b-x)\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)\cdot 2(-2x+a+b)\big(f(x)-\varphi(x)\big)\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)^2\,dx +$$

$$+\,\frac{2}{3}\left(\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\right)^2\cdot(b-a)^3. \quad (1.2.21)$$

თუ (1.2.19) ტოლობაში გამოვიყენებთ (1.2.17) და (1.2.21) შეფასებებს, გვექნება

$$\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)^2\,dx \le$$

$$\le \frac{8}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)+\varphi(x)|\cdot(b-a)^3 +$$

$$+\,\frac{4}{3}\left(\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\right)^2\cdot(b-a)^3. \quad (1.2.22)$$

გადავიდეთ დამტკიცების მეორე ეტაპზე. ვთქვათ, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორი ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამოზნექილი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. გვინდა ავაგოთ ამ ფუნქციების აპროქსიმაციები, რომლებიც ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ამოზნექილი ფუნქციებია. ამ მიზნით გამოვიყენოთ კარგად ცნობილი შემდეგი გამაგლუვებელი $\rho(x)$ ფუნქცია

$$\rho(x)=\begin{cases} c\cdot e^{\frac{1}{x(x-2)}}, & \text{როცა } \ 0<x<2 \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}, \quad (1.2.23)$$

ამასთან, c მუდმივი შევარჩიოთ ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\int_0^2 \rho(x)\,dx = 1.$$

განვსაზღვროთ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_a^b n\cdot\rho\big(n\cdot(x-y)\big)\cdot f(y)\,dy, \\ \varphi_n(x) &= \int_a^b n\cdot\rho\big(n\cdot(x-y)\big)\cdot \varphi(y)\,dy, \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

სადაც $n = 1, 2, \dots$ და $x \in (-\infty, +\infty)$.

ნებისმიერი ფიქსირებული $\delta > 0$-თვის განვიხილოთ $f_n(x)$ და $\varphi_n(x)$ ფუნქციების შეზღუდვა $[a+\delta, b-\delta]$ სეგმენტზე და ვიგულისხმოთ $n \geq \frac{4}{\delta}$. მაშინ $n\cdot(x-a) \geq 4$ და $n\cdot(x-b) \leq 0$, როცა $x \in [a+\delta, b-\delta]$.

მოვახდინოთ (1.2.24)-ში ცვლადის შეცვლა $z = n\cdot(x-y)$, გვექნება

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{n\cdot(x-b)}^{n\cdot(x-a)} \rho(z)\cdot f\Big(x-\frac{z}{n}\Big)\,dz, \\ \varphi_n(x) &= \int_{n\cdot(x-b)}^{n\cdot(x-a)} \rho(z)\cdot \varphi\Big(x-\frac{z}{n}\Big)\,dz. \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

მაგრამ $\rho(z)$ ფუნქცია 0-ის ტოლია $(0,2)$-ის გარეთ და ამიტომ მივიღებთ

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^2 \rho(z)\cdot f\Big(x-\frac{z}{n}\Big)\,dz, \\ \varphi_n(x) &= \int_0^2 \rho(z)\cdot \varphi\Big(x-\frac{z}{n}\Big)\,dz, \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

თუ $n \geq \frac{4}{\delta}$. (1.2.24) განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ $f_n(x)$ და $\varphi_n(x)$ ფუნქციები უსასრულოდ წარმოებადია. ამასთან, მათი ამოზნექილობა მარტივად გამომდინარეობს (1.2.26) წარმოდგენიდან.

ვაჩვენოთ $f_n(x)$ და $\varphi_n(x)$ ფუნქციების მიმდევრობათა თანაბარი კრებადობა $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებისკენ $[a+\delta, b-\delta]$ სეგმენტზე, შესაბამისად. ამ მიზნით გამოვიყენოთ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების თანაბარი უწყვეტობა $[a+\frac{\delta}{2}, b-\delta]$ სეგმენტზე. ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის არსებობს ისეთი $\widehat{\delta}$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\big|f(x_2)-f(x_1)\big| \leq \varepsilon, \ \ \text{თუ} \ \ |x_2-x_1| < \widehat{\delta}, \ \ x_1,\, x_2 \in \Big[a+\frac{\delta}{2}, b-\delta\Big]. \tag{1.2.27}$$

ავიღოთ $n \geq \max\{\frac{4}{\widehat{\delta}}, \frac{4}{\delta}\}$. მაშინ, როცა $0 \leq z \leq 2$ და $x \in [a+\delta, b-\delta]$, გვაქვს

$$\frac{z}{n} \leq \min\left\{\frac{\widehat{\delta}}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}, \quad x - \frac{z}{n} \geq a + \delta - \frac{\delta}{2} = a + \frac{\delta}{2}\,. \tag{1.2.28}$$

ამრიგად,

$$\left|f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon, \quad \text{როცა} \;\; n \geq \max\left\{\frac{4}{\widehat{\delta}}, \frac{4}{\delta}\right\} \tag{1.2.29}$$

და, მაშასადამე,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\int\limits_0^2 \rho(z) \cdot \left(f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x)\right) dz\right| \leq \varepsilon \tag{1.2.30}$$

ყოველი $x \in [a+\delta, b-\delta]$ და $n \geq \max\{\frac{4}{\widehat{\delta}}, \frac{4}{\delta}\}$.

ამგვარად, ვაჩვენეთ $f_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კრებადობა $f(x)$ ფუნქციისკენ $[a+\delta, b-\delta]$ სეგმენტზე.

ახლა გვჭირდება გავაწარმოოთ ინტეგრალები (1.2.26) ტოლობებში. გამოვიყენოთ ამოზნექილ ფუნქციებზე ძირითადი (1.2.1) უტოლობა, ავიღოთ მასში

$$x_1 = \left(x - \frac{z}{n}\right) - h, \quad x_2 = x - \frac{z}{n}\,, \tag{1.2.31}$$

სადაც $0 < h < \frac{\delta}{4}$.

გვექნება

$$f'\left(\left(x - \frac{z}{n} - h\right) - \right) \leq \frac{f(x - \frac{z}{n}) - f(x - \frac{z}{n} - h)}{h} \leq f'\left(\left(x - \frac{z}{n}\right) - \right), \tag{1.2.32}$$

სადაც $x \in [a+\delta, b-\delta]$, $0 \leq z \leq 2$, $0 < h < \frac{\delta}{4}$ და $n \geq \frac{4}{\delta}$.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ამოზნექილი ფუნქციის მარცხენა წარმოებული არაკლებადია და

$$x - \frac{z}{n} - h \geq a + \frac{\delta}{4}\,, \quad x - \frac{z}{n} \leq b - \delta, \tag{1.2.33}$$

მივიღებთ

$$f'\left(\left(a + \frac{\delta}{4}\right) - \right) \leq \frac{f(x - \frac{z}{n}) - f(x - \frac{z}{n} - h)}{h} \leq f'((b-\delta)-). \tag{1.2.34}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციათა

$$\Phi_h^{n,x}(z) = \frac{f(x - \frac{z}{n}) - f(x - \frac{z}{n} - h)}{h} \tag{1.2.35}$$

ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრულია შემდეგი მუდმივით

$$c = \max\left(\left|f'\left(\left(a + \frac{\delta}{4}\right) - \right)\right|, \left|f'((b-\delta)-)\right|\right), \tag{1.2.36}$$

თუ $x \in [a+\delta, b-\delta]$, $0 \leq z \leq 2$, $0 < h < \frac{\delta}{4}$ და $n \geq \frac{4}{\delta}$.

(1.2.26) წარმოდგენიდან ვღებულობთ

$$\frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} = \int\limits_0^2 \rho(z) \cdot \frac{f(x-\frac{z}{n}) - f(x-\frac{z}{n}-h)}{h}\, dz. \tag{1.2.37}$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემას შემოსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობისთვის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ და h-ს მივასწრაფებთ 0-კენ, გვექნება

$$f_n'(x) = \int\limits_0^2 \rho(z) \cdot f'\Big(\Big(x - \frac{z}{n}\Big) - \Big)\, dz \tag{1.2.38}$$

სადაც $x \in [a+\delta, b-\delta]$ და $n \geq \frac{4}{\delta}$.

განვიხილოთ სხვაობა

$$f_n'(x) - f'(x-) = \int\limits_0^2 \rho(z) \cdot \bigg(f'\Big(\Big(x - \frac{z}{n}\Big) - \Big) - f'(x-)\bigg)\, dz, \tag{1.2.39}$$

სადაც ვიგულისხმებთ, რომ $n \geq \frac{4}{\delta}$.

ვინაიდან მარცხენა წარმოებული $f'(x-)$ მარცხნიდან უწყვეტია, ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის შეიძლება მოვძებნოთ $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ $(0 \leq z \leq 2)$

$$\left| f'\Big(\Big(x - \frac{z}{n}\Big) - \Big) - f'(x-) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{თუ} \quad n > N(\varepsilon). \tag{1.2.40}$$

შედეგად ვღებულობთ

$$\big|f_n'(x) - f'(x-)\big| \leq \int\limits_0^2 \rho(z) \cdot \varepsilon\, dz = \varepsilon, \quad \text{თუ} \quad n > \max\Big(\frac{4}{\delta}, N(\varepsilon)\Big). \tag{1.2.41}$$

ამგვარად, ყოველი ფიქსირებული $x \in [a+\delta, b-\delta]$-თვის გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x-),$$

და, ანალოგიურად, მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(x) = \varphi'(x-).$$

დავწეროთ (1.2.22) შეფასება $f_n(x)$ და $\varphi_n(x)$ ფუნქციებისთვის და $[a+\delta, b-\delta]$ სეგმენტისთვის

$$\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} \big(x-(a+\delta)\big)^2 \cdot \big((b-\delta)-x\big)^2 \cdot \big(f_n'(x) - \varphi_n'(x)\big)^2\, dx \leq$$

$$\leq \frac{8}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot \sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\big|f_n(x)-\varphi_n(x)\big|\times$$
$$\times \sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\big|f_n(x)+\varphi_n(x)\big|\cdot(b-a-2\cdot\delta)^3+$$
$$+\frac{4}{3}\cdot\Big(\sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\big|f_n(x)-\varphi_n(x)\big|\Big)^2\cdot(b-a-2\cdot\delta)^3. \quad (1.2.42)$$

$f'(x-)$ მარცხენა წარმოებულის არაკლებადობის გამო გვაქვს

$$f'\Big(\Big(a+\frac{\delta}{2}\Big)-\Big)\leq f'\Big(\Big(x-\frac{z}{n}\Big)-\Big)\leq f'((b-\delta)-), \quad (1.2.43)$$

სადაც $x\in[a+\delta,b-\delta]$, $0\leq z\leq 2$ და $n\geq\frac{4}{\delta}$.

თუ უკანასკნელ უტოლობას $\rho(z)$-ზე გავამრავლებთ და z-ით ვაინტეგრებთ $(0,2)$ ინტერვალში, (1.2.38) ტოლობიდან მივიღებთ

$$f'\Big(\Big(a+\frac{\delta}{2}\Big)-\Big)\leq f_n'(x)\leq f'((b-\delta)-). \quad (1.2.44)$$

და, ანალოგიურად, $\varphi_n'(x)$ ფუნქციებისთვის გვექნება

$$\varphi'\Big(\Big(a+\frac{\delta}{2}\Big)-\Big)\leq \varphi_n'(x)\leq \varphi'((b-\delta)-). \quad (1.2.45)$$

მაშასადამე, $f_n'(x)$ და $\varphi_n'(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობები თანაბრად შემოსაზღვრულია $[a+\delta,b-\delta]$ სეგმენტზე, როცა $n\geq\frac{4}{\delta}$. ამრიგად, შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვარზე (1.2.42) უტოლობაში, როცა $n\to\infty$ და მივიღებთ

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta}\big(x-(a+\delta)\big)^2\cdot\big((b-\delta)-x\big)^2\cdot\big(f'(x-)-\varphi'(x-)\big)^2\,dx\leq$$
$$\leq\frac{8}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot\sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\times$$
$$\times\sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\big|f(x)+\varphi(x)\big|\cdot(b-a-2\cdot\delta)^3+$$
$$+\frac{4}{3}\cdot\Big(\sup_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\big|f(x)-\varphi(x)\big|\Big)^2\cdot(b-a-2\cdot\delta)^3. \quad (1.2.46)$$

საბოლოოდ დაგვრჩა δ-თი ზღვარზე გადასვლა (1.2.46) უტოლობაში, როცა $\delta\to 0$. ამ მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$u_\delta(x)=\begin{cases}\chi_{(a+\delta,b-\delta]}(x)\cdot\Big(\dfrac{x-a-\delta}{x-a}\Big)^2\cdot\Big(\dfrac{b-\delta-x}{b-x}\Big)^2, \\ \qquad\qquad \text{როცა}\ \ a<x<b \\ 0\ \ \text{სხვა შემთხვევაში}\end{cases}, \quad (1.2.47)$$

სადაც $\chi_{_{(a+\delta,b-\delta]}}(x)$ წარმოადგენს $(a+\delta, b-\delta]$ ინტერვალის მახასიათებელ ფუნქციას. ცხადია, რომ

$$0 \le u_\delta(x) \le 1, \quad \lim_{\delta \downarrow 0} u_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ a < x < b \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}. \tag{1.2.48}$$

გავიხსენოთ ახლა $w(x)$ ფუნქციის (1.2.7) განსაზღვრა და ის ფაქტი, რომ ის შემოსაზღვრული ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. გადავწეროთ (1.2.46) უტოლობა $w(x)$ და $u_\delta(x)$ ფუნქციების ტერმინებში

$$\int_a^b u_\delta(x) \cdot w^2(x)\, dx \le \frac{8}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \sup_{x \in [a+\delta, b-\delta]} \big| f(x) - \varphi(x) \big| \times$$
$$\times \sup_{x \in [a+\delta, b-\delta]} \big| f(x) + \varphi(x) \big| \cdot (b - a - 2 \cdot \delta)^3 +$$
$$+ \frac{4}{3} \cdot \Big(\sup_{x \in [a+\delta, b-\delta]} \big| f(x) - \varphi(x) \big| \Big)^2 \cdot (b - a - 2 \cdot \delta)^3. \tag{1.2.49}$$

გადავიდეთ ზღვარზე მიღებულ უტოლობაში, როცა $\delta \to 0$ და, საბოლოოდ, ვღებულობთ სასურველ (1.2.8) ენერგეტიკულ შეფასებას. $\square$

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს ამ პარაგრაფის ძირითად შედეგს.

თ ე ო რ ე მ ა 1.2.2. *ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უცნობი უწყვეტი ამოზნექილი ფუნქცია და დავუშვათ, რომ ხელთ გვაქვს მისი რაიმე უწყვეტი $f_\delta(x)$ თანაბარი აპროქსიმაცია. განვიხილოთ $f_\delta(x)$ ფუნქციის ამოზნექილი $\Gamma f_\delta(x)$ მომვლები. მაშინ, თუ უცნობი $f'(x-)$ მარცხენა წარმოებულის შესაფასებლად გამოვიყენებთ $\Gamma f_\delta(x)$ ამოზნექილი მომვლების $(\Gamma f_\delta)'(x-)$ მარცხენა წარმოებულს, ადგილი აქვს შემდეგ ენერგეტიკულ უტოლობას*

$$\int_a^b (x-a)^2 \cdot (b-x)^2 \cdot \big(f'(x-) - (\Gamma f_\delta)'(x-) \big)^2 \, dx \le$$
$$\le \frac{8}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \sup_{x \in [a,b]} \big| f_\delta(x) - f(x) \big| \Big(\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f_\delta(x)| \Big) \cdot (b-a)^3 +$$
$$+ \frac{4}{3} \Big(\sup_{x \in [a,b]} \big| f_\delta(x) - f(x) \big| \Big)^2 \cdot (b-a)^3. \tag{1.2.50}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sup_{x \in [a,b]} \big| f_\delta(x) - f(x) \big| = c_\delta.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$f(x) - c_\delta \le f_\delta(x), \quad f_\delta(x) - c_\delta \le f(x), \ \text{ თუ } \ x \in [a,b].$$

აქედან ვხედავთ, რომ ამოზნექილი $f(x)-c_\delta$ ფუნქცია მაჟორირდება $f_\delta(x)$ ფუნქციით და, მაშასადამე, მაჟორირდება მისი ამოზნექილი მომვლებით

$$f(x)-c_\delta \leq \Gamma f_\delta(x), \ \ x\in[a,b].$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\Gamma f_\delta(x)-c_\delta \leq f_\delta(x)-c_\delta \leq f(x), \ \ x\in[a,b],$$

აქედან ვასკვნით

$$\sup_{x\in[a,b]}\big|\Gamma f_\delta(x)-f(x)\big| \leq \sup_{x\in[a,b]}\big|f_\delta(x)-f(x)\big|. \tag{1.2.51}$$

ანალოგიურად შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_\delta(x)| = \widetilde{c}_\delta,$$

მაშინ გვექნება

$$-\widetilde{c}_\delta \leq f_\delta(x) \leq \widetilde{c}_\delta, \ \ x\in[a,b]$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$-\widetilde{c}_\delta \leq \Gamma f_\delta(x) \leq f_\delta(x) \leq \widetilde{c}_\delta, \ \ x\in[a,b],$$

მაშასადამე,

$$\sup_{x\in[a,b]}\big|\Gamma f_\delta(x)\big| \leq \sup_{x\in[a,b]}\big|f_\delta(x)\big|. \tag{1.2.52}$$

თეორემა 1.2.1-ში $\varphi(x)$ ფუნქციის ნაცვლად ავიღოთ $\Gamma f_\delta(x)$ ამოზნექილი მომვლები და სათანადო (1.2.8) შეფასების მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ (1.2.51), (1.2.52) უტოლობები. მაშინ უშუალოდ მივდივართ (1.2.8) ენერგეტიკულ შეფასებამდე. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.2.1. ვინაიდან ერთი ცვლადის ამოზნექილი ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები ემთხვევა ერთმანეთს ყველგან, გარდა შესაძლო წერტილთა თვლადი სიმრავლისა, ვასკვნით, რომ თეორემები 1.2.1 და 1.2.2 სამართლიანია აგრეთვე მარჯვენა წარმოებულისთვისაც.

თავი 2

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის გრადიენტის L^2-აპროქსიმაცია მისი თანაბარი აპროქსიმაციის მეშვეობით

2.1 შესავალი

კარგად არის ცნობილი, რომ დეტერმინისტული ოპტიმალური მართვის თეორიის კლასიკური ბოლცას ამოცანის ფასის ფუნქცია აკმაყოფილებს პირველი რიგის ჰამილტონ–იაკობი-ბელმანის არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას (იხ. კანარსა, სინესტრარი [5, თავი 7]).

თეორემა 7.4.11 (კანარსა და სინესტრარი [5]) ასაბუთებს, რომ ჰამილტონ–იაკობი-ბელმანის განტოლების ამონახსნი (გარკვეულ ბუნებრივ პირობებში) წარმოადგენს ნახევრად ჩაზნექილ ფუნქციას ერთობლივად (t, x) წყვილის მიმართ.

მეორე რიგის ჰამილტონ–იაკობი-ბელმანის განტოლების ამონახსნის ნახევრადჩაზნექილობა $x \in \mathbb{R}^n$ სივრცითი ცვლადის მიმართ დადგენილ იქნა აიშიისა და ლიონსის მიერ [1] წმინდა ანალიზური მეთოდებით, როგორც ელიფსური ასევე პარაბოლური ტიპის განტოლებებისთვის.

გიგამ, გოტომ, აიშიიმ და სატომ [2] აღმოაჩინეს შესანიშნავი ფაქტი, რომ მეორე რიგის სავსებით არაწრფივი პარაბოლური კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისთვის ევკლიდეს $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ადგილი აქვს ამონახსნის ჩაზნექილობის თვისების შენარჩუნებას $t = 0$ საწყისი მომენტიდან დროის ნებისმიერი $t > 0$ მომენტისთვის სივრცითი $x \in \mathbb{R}^n$ ცვლადის მიმართ.

კარგადაა ცნობილი, რომ ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის D არეში მართვა-

დი მარკოვის დიფუზიური პროცესის ფასის ფუნქცია წარმოადგენს მეორე რიგის ჰამილტონ–იაკობი-ბელმანის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს. პრაქტიკული ამოცანების უმეტესობისთვის ჰამილტონ–იაკობი-ბელმანის განტოლების ზუსტი ამოხსნა შეუძლებელია, ამიტომ განვითარდა ამონახსნის მოძებნის რიცხვითი, მიახლოებითი მეთოდები. ოპტიმალური მართვების ასაგებად აუცილებელია $v(x,t)$ ფასის ფუნქციის $\operatorname{grad} v$ გრადიენტისა და ჰესიანის $\operatorname{Hess} v$ რიცხვითი გამოთვლა და ამდენად არასაკმარისია მხოლოდ $v(x,t)$ ფასის ფუნქციის მიახლოებითი გამოთვლა.

ამ თავში ვთავაზობთ $v(x,t)$ ფასის ფუნქციის სობოლევის $\operatorname{grad} v$ გრადიენტის L^2 აპროქსიმაციის მეთოდს იმ დაშვებაში, რომ $v(x,t)$ ნახევრადამოზნექილი (ნახევრადჩაზნექილი) ფუნქციაა $x \in \mathbb{R}^n$ სივრცითი ცვლადის მიმართ.

2.2 ენერგეტიკული უტოლობა ორი შემოსაზღვრული ნახევრადამოზნექილი ფუნქციის სხვაობისთვის

განვიხილოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცის არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია ამოზნექილი D ქვესიმრავლე. უწყვეტი $u : D \to \mathbb{R}$ ფუნქციისთვის შემოვიყვანოთ მეორე რიგის სასრული სხვაობები

$$\Delta^2 u = \frac{1}{h^2}\Big[u(x+h\cdot\gamma) + u(x-h\cdot\gamma) - 2u(x)\Big], \tag{2.2.1}$$

სადაც $h > 0$ სკალარული ცვლადია, $x \in D$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ არის $\mathbb{R}^n$-ის ერთეულოვანი ვექტორი, $|\gamma| = 1$, და ვგულისხმობთ, რომ $[x - h\cdot\gamma, x + h\cdot\gamma] \subset D$.

განსაზღვრება 2.2.1 (იხ. კანარსა, სინესტრარი [5, განსაზღვრება 1.1.1]). ვიტყვით, რომ $u : D \to \mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქცია ნახევრადამოზნექილია, თუ არსებობს არაუარყოფითი $c \geq 0$ მუდმივი ისეთი, რომ

$$\Delta^2 u \geq -c \tag{2.2.2}$$

ნებისმიერი $h > 0$, $x \in D$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $|\gamma| = 1$-თვის, სადაც იგულისხმება, რომ $[x - h\cdot\gamma, x + h\cdot\gamma] \subset D$. არაუარყოფით c მუდმივს ეწოდება ნახევრადამოზნექილობის მუდმივი (ცხადია, იგი არ არის ერთადერთი).

$u : D \to \mathbb{R}$ უწყვეტ ფუნქციას ეწოდება ნახევრადჩაზნექილი, თუ $(-u)$ ნახევრადამოზნექილია. კარგად არის ცნობილი, რომ $u : D \to \mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქცია ამოზნექილია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის ნახევრადამოზნექილია სათანადო $c = 0$ მუდმივით. შემდეგში ჩვენ გამოვიყენებთ ნახევრადამოზნექილი ფუნქციების ექვივალენტურ დახასიათებას (იხ. კანარსა, სინესტრარი [5, წინადადება 1.1.3]).

$u : D \to \mathbb{R}$ ფუნქცია ნახევრადამოზნექილია D არეში ნახევრადამოზნექილობის $c \geq 0$ მუდმივით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$u_c(x) = u(x) + \frac{c}{2}\cdot|x|^2 \tag{2.2.3}$$

ფუნქცია ამოზნექილია D-ში. თუ აღვნიშნავთ

$$v_0(x) = \frac{1}{2} \cdot |x|^2, \tag{2.2.4}$$

მაშინ მივიღებთ

$$u(x) = u_c(x) - c \cdot v_0(x), \quad x \in D,$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ნახევრადამოზნექილი ფუნქცია ლოკალურად ლიფშიცისაა D არეში (იხ. ევანსი, გარიეპი [16, პარაგრაფი 6.3]). ლოკალურად ლიფშიცის ფუნქციები ეკუთვნიან $W^{1,\infty}_{loc}(D)$ სობოლევის სივრცეს და, მაშასადამე, წარმოადგენენ სობოლევის ფუნქციებს ევანსისა და გარიეპის [16, თავი 4]) ტერმინოლოგიაში. ეს ნიშნავს, რომ

$$\operatorname{grad} u(x) = \Big(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\Big)$$

სობოლევის გრადიენტი არსებობს და ლოკალურად შემოსაზღვრულია D არეში. რადემახერის შესანიშნავი თეორემის მიხედვით ყოველი ლოკალურად ლიფშიცის ფუნქცია თითქმის ყველგან დიფერენცირებადია, მაშასადამე, სობოლევის გრადიენტი ემთხვევა კლასიკურ გრადიენტს თითქმის ყველგან n-განზომილებიანი ლებეგის ზომის მიმართ.

განვიხილოთ $d_{\partial D}(x)$, რომელიც წარმოადგენს მანძილის ფუნქციას $x \in \mathbb{R}^n$-ის ნებისმიერი წერტილიდან ∂D საზღვრამდე.

შემდეგი თეორემა ამ პარაგრაფის ძირითადი შედეგია, რომელიც კ. შაშიაშვილისა და მ. შაშიაშვილის [7] შესაბამისი ერთგანზომილებიანი უტოლობის განზოგადებაა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.1. *ვთქვათ, u და v ორი შემოსაზღვრული ნახევრადამოზნექილი ფუნქციაა $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემოსაზღვრულ ღია ამოზნექილ D ქვესიმრავლეში, ნახევრადამოზნექილობის სათანადო c_u და c_v მუდმივებით. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წონიანი ენერგეტიკული უტოლობა u და v ფუნქციების $u - v$ სხვაობისთვის*

$$\begin{aligned}\int_D |\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v|^2 \cdot \frac{d^2_{\partial D}}{n}\, dx + \int_D (u-v)^2\, dx \le \\ \le 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u - v\|_{L^\infty(D)} \times \\ \times \Big(\|u\|_{L^\infty(D)} + \|v\|_{L^\infty(D)} + 2\max(c_u, c_v) \cdot \|v_0\|_{L^\infty(D)}\Big).\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . საკმარისია (2.2.5) უტოლობა დავამტკიცოთ ამოზნექილი ფუნქციებისთვის. მართლაც, ნახევრადამოზნექილი ფუნქციების (2.2.3) დახასიათებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\begin{aligned}\widetilde{u} &= u + \max(c_u, c_v) \cdot v_0, \\ \widetilde{v} &= v + \max(c_u, c_v) \cdot v_0.\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

ფუნქციები ამოზნექილია D არეში. დავუშვათ, რომ ენერგეტიკული უტოლობა სამართლიანია $\widetilde{u}$ და $\widetilde{v}$ ამოზნექილი ფუნქციებისთვის (სადაც $c_{\widetilde{u}} = c_{\widetilde{v}} = 0$). მაშინ გვექნება

$$\int\limits_D \big|\operatorname{grad}\widetilde{u} - \operatorname{grad}\widetilde{v}\big|^2 \cdot \frac{d^2_{\partial D}}{n}\,dx + \int\limits_D (\widetilde{u}-\widetilde{v})^2\,dx \le$$
$$\le 5\,\operatorname{meas} D \cdot \|\widetilde{u}-\widetilde{v}\|_{L^\infty(D)}\big(\|\widetilde{u}\|_{L^\infty(D)} + \|\widetilde{v}\|_{L^\infty(D)}\big), \quad (2.2.7)$$

საიდანაც (2.2.5) ტრივიალურად გამომდინარეობს.

იმისათვის, რომ (2.2.5) შეფასება დავამტკიცოთ ნებისმიერი არაგლუვი შემოსაზღვრული ფუნქციების და არაგლუვი ამოზნექილი D არეებისთვის, ჩვენ დაგვჭირდება მივუახლოვდეთ მათ სათანადო გლუვი ვარიანტებით. ამ მიზნით გამოვიყენებთ გაგლუვების სტანდარტულ ტექნიკას ევანსი, გარიეპიდან [16, თავი 4].

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned} u_k(x) &= k^n \int\limits_D \eta(k(x-y))\cdot u(y)\,dy, \\ v_k(x) &= k^n \int\limits_D \eta(k(x-y))\cdot v(y)\,dy, \end{aligned} \qquad k = 1,2,\dots, \quad (2.2.8)$$

სადაც

$$\eta(x) = \begin{cases} c\cdot\exp\Big(\dfrac{1}{|x|^2-1}\Big), & \text{if } |x|<1, \\ 0, & \text{if } |x|\ge 1, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

და $c>0$ მუდმივი განისაზღვრება

$$\int\limits_{R^n} \eta(x)\,dx = 1$$

ტოლობიდან. $\eta(x)$, $x\in R^n$ ფუნქციას ეწოდება გამაგლუვებელი ფუნქცია. კარგადაა ცნობილი, რომ u_k, v_k, $k=1,2,\dots$, ფუნქციები უსასრულოდ დიფერენცირებადია $\mathbb{R}^n$-ში. ჰემარი [20] აგებს D არის ისეთ გლუვ ღია ამოზნექილ ქვესიმრავლეებს D_m, $m = 1,2,\dots$, რომელთათვისაც სრულდება

$$\overline{D}_m \subset D_{m+1} \subset \overline{D}_{m+1} \subset D \ \text{ and } \ \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = D \quad (2.2.10)$$

ამასთან $\partial D_m \in C^\infty$, $m=1,2,\dots$. დავაფიქსიროთ ნებისმიერი m, $m=1,2,\dots$.

ფიქსირებული m-თვის განვსაზღვროთ k_m შემდეგი წესით

$$k_m = \inf\Big\{k:\ \frac{1}{k} < \frac{1}{2}\cdot\operatorname{dist}(D_m,\partial D)\Big\}. \quad (2.2.11)$$

როცა $k \geq k_m$, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$\begin{cases} u_k(x) = \displaystyle\int\limits_{B(0,1)} \eta(z) \cdot u\Big(x - \frac{z}{k}\Big)\, dz, \quad x \in \overline{D}_m, \\ v_k(x) = \displaystyle\int\limits_{B(0,1)} \eta(z) \cdot v\Big(x - \frac{z}{k}\Big)\, dz, \quad x \in \overline{D}_m, \end{cases} \tag{2.2.12}$$

საიდანაც ადვილად ჩანს, რომ

$$u_k, v_k : \overline{D}_m \to R, \ \ k \geq k_m$$

ფუნქციები ამოზნექილია $\overline{D}_m$ სიმრავლეზე.

ევანსი, გარიეპიდან [16, თავი 4, თეორემა 1] ვღებულობთ, რომ $L^p(D_m)$, $1 \leq p < \infty$, სივრცეში

$$\|u_k - u\|_{L^\infty(D_m)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|v_k - v\|_{L^\infty(D_m)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.2.13}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,, \ \ i = 1, \dots, n. \tag{2.2.14}$$

Δ იყოს ლაპლასის ოპერატორი და ფიქსირებული m-თვის განვსაზღვროთ წონის $h_m(x)$, $x \in \overline{D}_m$, ფუნქცია, როგორც დირიხლეს შემდეგი ამოცანის

$$\begin{cases} \Delta h_m(x) = -1 & D_m\text{-ში}, \\ h_m(x) = 0 & \partial D_m\text{-ზე}, \end{cases} \tag{2.2.15}$$

ერთადერთი ამონახსნი.

ვინაიდან D_m გლუვი არეა, გილბარგ, ტრუდინგერიდან [17, თავი 6] შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 6.14 და დავასკვნათ, რომ (2.2.15) დირიხლეს ამოცანას გააჩნია ერთადერთი $H_m(x)$ ამონახსნი, რომელიც გლუვია D_m არის საზღვრის ჩათვლით, ანუ $h_m \in C^2(\overline{D}_m)$. ჰოფის ძლიერი მაქსიმუმის პრინციპით ვღებულობთ

$$h_m(x) > 0 \ \ D_m\text{-ში}. \tag{2.2.16}$$

განვიხილოთ $B(a,R)$ ბირთვი ისეთი, რომ $\overline{D} \subset B(a,R)$ და განვიხილოთ შესაბამისი დირიხლეს ამოცანა

$$\begin{cases} \Delta h_B(x) = -1 & B\text{-ში}, \\ h_B(x) = 0 & \partial B\text{-ზე}. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

უკანასკნელი ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ცხადი სახით

$$h_B(x) = \frac{R^2 - |x-a|^2}{2n}\,, \ \ x \in \overline{B}. \tag{2.2.18}$$

$h_B(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს იგივე განტოლებას D_m არეში

$$\begin{cases}\Delta h_B(x) = -1 & D_m\text{-ში},\\ h_B(x) > 0 & \partial D_m\text{-ზე},\end{cases}$$

აქედან $h_B - h_m$ სხვაობისთვის ვღებულობთ განტოლებას

$$\begin{cases}\Delta(h_B - h_m) = 0 & D_m\text{-ში},\\ (h_B - h_m) > 0 & \partial D_m\text{-ზე}.\end{cases} \tag{2.2.19}$$

იგივე მაქსიმუმის პრინციპის გამოყენებით ვღებულობთ

$$h_m(x) < h_B(x) \ \ \overline{D}_m\text{-ში},$$

აქედან კი გამომდინარეობს უტოლობა

$$0 \leq h_m(x) \leq \frac{R^2}{2n}\,, \ \ x \in \overline{D}_m. \tag{2.2.20}$$

მსგავსი მსჯელობით ვასკვნით, რომ

$$h_m(x) \leq h_{m+1}(x), \ \ x \in \overline{D}_m, \tag{2.2.21}$$

და იგივე უტოლობა დარჩება სამართლიანი, თუ $h_m(x)$ ფუნქციებს ტრივიალურად განვავრცობთ $\overline{D}_m$-ის გარეთ (ანუ ავიღებთ 0-ის ტოლს).

ამგვარად, ვღებულობთ, რომ h_m, $m = 1, 2, \ldots$, არაუარყოფით ფუნქციათა მიმდევრობა არაკლებადია და შემოსაზღვრულია მუდმივით, მაშასადამე, მას გააჩნია ზღვარი

$$h_\infty(x) = \lim_{m\to\infty} h_m(x), \ \ 0 \leq h_\infty(x) \leq \frac{R^2}{2n}\,, \tag{2.2.22}$$

სადაც $x \in \overline{D}$.

ახლა ჩვენი მიზანია $h_\infty(x)$ ფუნქციისთვის დავადგინოთ შემდეგი უტოლობა

$$h_\infty(x) \geq \frac{d^2_{\partial D}(x)}{2n}\,, \ \ x \in \overline{D}. \tag{2.2.23}$$

ავიღოთ D არის ნებისმიერი $x_0 \in D$ წერტილი და ავარჩიოთ $r > 0$ ისე, რომ $\overline{B}(x_0, r) \subset D$. ვინაიდან $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m = D$ ვასკვნით, რომ არსებობს ისეთი m_0, რომ

$$\overline{B}(x_0, r) \subset D_m, \ \ \text{თუ} \ \ m \geq m_0.$$

განვიხილოთ $B(x_0, r)$-ში დირიხლეს ამოცანა

$$\begin{cases}\Delta\widetilde{h}(x) = -1 & B(x_0, r)\text{-ში},\\ \widetilde{h}(x) = 0 & \partial B(x_0, r)\text{-ზე}.\end{cases} \tag{2.2.24}$$

(2.2.18)-ის ანალოგიურად გვაქვს

$$\widetilde{h}(x) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{2n}\,, \quad x \in \overline{B}(x_0, r). \tag{2.2.25}$$

$B(x_0, r)$ ბირთვში განვიხილოთ $h_m - \widetilde{h}$ სხვაობა, როცა $m \geq m_0$. ის აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\Delta(h_m - \widetilde{h}) = 0 \ \ B(x_0, r)\text{-ში}$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$h_m - \widetilde{h} > 0 \ \ \partial B(x_0, r)\text{-ზე}.$$

მაქსიმუმის პრინციპიდან ვღებულობთ

$$h_m(x) > \widetilde{h}(x) \ \ \overline{B}(x_0, r)\text{-ზე}. \tag{2.2.26}$$

უკანასკნელ უტოლობაში ავიღოთ $x = x_0$, გვექნება

$$h_m(x_0) > \frac{r^2}{2n}\,, \ \ \text{როცა} \ \ m \geq m_0. \tag{2.2.27}$$

ახლა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$, მივიღებთ

$$h_\infty(x) \geq \frac{r^2}{2n}\,.$$

მივასწრაფოთ r ცვლადი $d_{\partial D}(x_0)$ სიდიდისკენ, მაშინ საბოლოოდ ვღებულობთ

$$h_\infty(x_0) \geq \frac{d^2_{\partial D}(x_0)}{2n}\,, \quad x_0 \in D,$$

რაც წარმოადგენს სასურველ (2.2.23) უტოლობას.

დავაფიქსიროთ m და ავიღოთ ნებისმიერი k ისეთი, რომ $k \geq k_m$, სადაც k_m განსაზღვრულია (2.2.11) ტოლობით. (2.2.12) ფორმულებიდან ვიცით, რომ u_k, v_k ფუნქციები უსასრულოდ დიფერენცირებადი ამოზნექილი ფუნქციებია $\overline{D}_m$-ზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$w_k = u_k - v_k, \quad k \geq k_m. \tag{2.2.28}$$

ამიერიდან ჩვენ რამდენჯერმე გამოვიყენებთ გრინის კლასიკურ ფორმულას $\overline{D}_m$ სიმრავლეზე გლუვი ფუნქციებისთვის.

გვაქვს

$$\int\limits_{D_m} \Delta w_k^2 \cdot h_m \, dx = \int\limits_{D_m} w_k^2 \cdot \Delta h_m \, dx - \int\limits_{\partial D_m} w_k^2 \cdot (\operatorname{grad} h_m, n_m) \, d\sigma_m, \tag{2.2.29}$$

სადაც $n_m(x) = (n_{i,m}(x))_{i=1,\dots,n}$ წარმოადგენს $x \in \partial D_m$ წერტილში გავლებულ ერთეულოვან გარე ნორმალს, $d\sigma_m$ კი არის D_m არის საზღვრის $(n-1)$-განზომილებიანი ზომა. გვაქვს

$$\Delta w_k^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right)^2 + 2 w_k \cdot \Delta w_k. \tag{2.2.30}$$

აქედან ვღებულობთ

$$2\int\limits_{D_m}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\Big)^2 h_m\,dx + 2\int\limits_{D_m} w_k\cdot\Delta w_k\cdot h_m\,dx =$$

$$= -\int\limits_{D_m} w_k^2\,dx - \int\limits_{\partial D_m} w_k^2(\operatorname{grad} h_m, n_m)\,d\sigma_m, \quad (2.2.31)$$

მაგრამ მიმართული წარმოებულის განსაზღვრის გამო $x\in\partial D_m$ წერტილისთვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\operatorname{grad} h_m, n_m) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{h_m(x)-h_m(x-t\cdot n_m)}{t}\le 0. \quad (2.2.32)$$

(2.2.31) ტოლობაში ავიღოთ $w_k=1$, მივიღებთ

$$\int\limits_{\partial D_m}(\operatorname{grad} h_m, n_m)\,d\sigma_m = -\operatorname{meas} D_m. \quad (2.2.33)$$

(2.2.31) იგივეობიდან გვაქვს შემდეგი უტოლობა

$$2\int\limits_{D_m}|\operatorname{grad} w_k|^2 h_m\,dx + \int\limits_{D_m} w_k^2\,dx \le$$

$$\le 2\|w_k\|_{L^\infty(D_m)}\int\limits_{D_m}|\Delta u_k-\Delta v_k|h_m\,dx+$$

$$+\|w_k\|^2_{L^\infty(D_m)}\int\limits_{\partial D_m}\big|(\operatorname{grad} h_m, n_m)\big|\,d\sigma_m. \quad (2.2.34)$$

მაგრამ u_k, v_k ფუნქციები ამოზნექილია და ამიტომ

$$\Delta u_k\ge 0,\quad \Delta v_k\ge 0. \quad (2.2.35)$$

(2.2.32) და (2.2.33) ტოლობებიდან ვასკვნით, რომ

$$\int\limits_{\partial D_m}\big|(\operatorname{grad} h_m, n_m)\big|\,d\sigma_m = -\int\limits_{\partial D_m}(\operatorname{grad} h_m, n_m)\,d\sigma_m = \operatorname{meas} D_m. \quad (2.2.36)$$

აქედან ვღებულობთ შეფასებას

$$\int\limits_{D_m}|\operatorname{grad} w_k|^2\cdot(2h_m)\,dx + \int\limits_{D_m} w_k^2\,dx \le$$

$$\le 2\|w_k\|_{L^\infty(D_m)}\int\limits_{D_m}\Delta(u_k+v_k)h_m\,dx+$$

$$+\operatorname{meas} D_m\cdot\|w_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big(\|u_k\|_{L^\infty(D_m)}+\|v_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big). \quad (2.2.37)$$

კიდევ ერთხელ გამოვიყენოთ გრინის მეორე ფორმულა

$$\int\limits_{D_m} \Delta(u_k+v_k)h_m\,dx =$$

$$= \int\limits_{D_m} (u_k+v_k)\cdot\Delta h_m\,dx + \int\limits_{\partial D_m} (u_k+v_k)\cdot(\operatorname{grad} h_m, -n_m)\,d\sigma_m \le$$

$$\le \Big(\|u_k\|_{L^\infty(D_m)} + \|v_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big)\cdot \operatorname{meas} D_m +$$

$$+\Big(\|u_k\|_{L^\infty(D_m)} + \|v_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big)\cdot \operatorname{meas} D_m =$$

$$= 2\operatorname{meas} D_m\Big(\|u_k\|_{L^\infty(D_m)} + \|v_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\int\limits_{D_m} \Delta(u_k+v_k)h_m\,dx \le 2\operatorname{meas} D_m\Big(\|u_k\|_{L^\infty(D_m)} + \|v_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big). \tag{2.2.38}$$

(2.2.37) და (2.2.38) უტოლობებიდან ვღებულობთ შეფასებას

$$\int\limits_{D_m} |\operatorname{grad} w_k|^2\cdot(2h_m)\,dx + \int\limits_{D_m} w_k^2\,dx \le$$

$$\le 5\operatorname{meas} D_m\cdot\|w_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big(\|u_k\|_{L^\infty(D_m)} + \|v_k\|_{L^\infty(D_m)}\Big). \tag{2.2.39}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.2.13) და (2.2.14) ნორმით კრებადობებს და უკანასკნელ შეფასებაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k\to\infty$, გვექნება

$$\int\limits_{D_m} \big|\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v\big|^2\cdot(2h_m)\,dx + \int\limits_{D_m} (u-v)^2\,dx \le$$

$$\le 5\operatorname{meas} D_m\cdot\|u-v\|_{L^\infty(D_m)}\Big(\|u\|_{L^\infty(D_m)} + \|v\|_{L^\infty(D_m)}\Big). \tag{2.2.40}$$

შევცვალოთ m სიდიდით $m+l$, $l=0,1,2,\ldots$, და (2.2.40)-ის მარცხენა მხარე შევზღუდოთ D_m სიმრავლეზე, მაშინ მივიღებთ

$$\int\limits_{D_m} \big|\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v\big|^2\cdot(2h_{m+l})\,dx + \int\limits_{D_m} (u-v)^2\,dx \le$$

$$\le 5\operatorname{meas} D_{m+l}\cdot\|u-v\|_{L^\infty(D_{m+l})}\Big(\|u\|_{L^\infty(D_{m+l})} + \|v\|_{L^\infty(D_{m+l})}\Big). \tag{2.2.41}$$

მივასწრაფოთ l უსასრულობისკენ, გვექნება

$$\int\limits_{D_m} \big|\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v\big|^2\cdot(2h_\infty)\,dx + \int\limits_{D_m} (u-v)^2\,dx \le$$

$$\le 5\operatorname{meas} D\cdot\|u-v\|_{L^\infty(D)}\Big(\|u\|_{L^\infty(D)} + \|v\|_{L^\infty(D)}\Big). \tag{2.2.42}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.2.23) შეფასებას, უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$\int\limits_{D_m} \left|\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v\right|^2 \cdot \frac{d_{\partial D}^2}{n}\, dx + \int\limits_{D_m} (u-v)^2\, dx \leq$$
$$\leq 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u-v\|_{L^\infty(D)} \Big(\|u\|_{L^\infty(D)} + \|v\|_{L^\infty(D)}\Big). \quad (2.2.43)$$

ბოლო შეფასებაში ავიღოთ $v = 0$, მაშინ მივდივართ შემდეგ უტოლობაზე:

$$\int\limits_{D_m} |\operatorname{grad} u|^2 \cdot \frac{d_{\partial D}^2}{n}\, dx \leq 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u\|_{L^\infty(D)}^2, \quad (2.2.44)$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ (2.2.44)-ის მარცხენა მხარე თანაბრად შემოსაზღვრულია m-ის მიმართ და, მაშასადამე, ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\int\limits_{D} |\operatorname{grad} u|^2 \cdot \frac{d_{\partial D}^2}{n}\, dx \leq 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u\|_{L^\infty(D)}^2 \quad (2.2.45)$$

სადაც $u : D \to \mathbb{R}$ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამოზნექილი ფუნქციაა, ხოლო D ნებისმიერი შემოსაზღვრული ღია ამოზნექილი ქვესიმრავლეა.

ამრიგად, შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვარზე (2.2.43) უტოლობაში რის შედეგადაც ვღებულობთ (2.2.5) სასურველ შეფასებას შემოსაზღვრული ამოზნექილი ფუნქციებისთვის. □

შ ე დ ე გ ი 2.2.1. *ვთქვათ,* $u_k : D \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, *არის ნახევრადამოზნექილ ფუნქციათა მიმდევრობა, ნახევრადამოზნექილობის ერთი და იგივე* $c \geq 0$ *მუდმივით. დავუშვათ, რომ ეს მიმდევრობა თანაბრად იკრიბება უწყვეტი* u *ფუნქციისკენ* $L^\infty(D)$-*ში. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას*

$$\int\limits_{D} \left|\operatorname{grad} u_k - \operatorname{grad} u\right|^2 \cdot \frac{d_{\partial D}^2}{n}\, dx \leq 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u_k - u\|_{L^\infty(D)} \times$$
$$\times \Big(2\|u\|_{L^\infty(D)} + \|u_k - u\|_{L^\infty(D)} + 2c\|v_0\|_{L^\infty(D)}\Big). \quad (2.2.46)$$

მართლაც, თუ გავიხსენებთ (2.2.2) *ნახევრადამოზნექილობის განსაზღვრას და მასში გადავალთ ზღვარზე, როცა* $k \to \infty$, *ადვილად დავასკვნით, რომ ზღვარითი* $u(x)$ *ფუნქცია აგრეთვე ნახევრადამოზნექილია, ნახევრადამოზნექილობის იგივე* c *მუდმივით. ახლა გამოვიყენოთ* (2.2.5) *წონიანი ენერგეტიკული უტოლობა* u_k *და* u *ფუნქციებისთვის და მივიღებთ* (2.2.46) *შეფასებას.*

2.3 ნახევრადამოზნექილი ფუნქციის გრადიენტის L^2-აპროქსიმაცია ამოზნექილი მომვლების მეშვეობით

განვიხილოთ ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცის არაცარიელი შემოსაზღვრული ღია ამოზნექილი D ქვესიმრავლე და მასზე განსაზღვრული უწყვეტი შემოსაზღვრული $u(x)$ ფუნქცია, $u : D \to \mathbb{R}$. $u(x)$ ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები განისაზღვრება როგორც ყველა იმ ამოზნექილი ფუნქციის სუპრემუმი, რომლებიც მაჟორირდებიან მოცემული $u(x)$ ფუნქციით

$$\Gamma(u) = \sup\Big\{v(x) : \ \ v(x) \text{ ამოზნექილია } D\text{-ში}, \qquad v(x) \leq u(x) \text{ ყოველი } x \in D\text{-თვის}\Big\}. \quad (2.3.1)$$

ვთქვათ, $u : D \to \mathbb{R}$ წარმოადგენს შემდეგი (საზოგადოდ, სავსებით არაწრფივი) კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს

$$F(x, u, \operatorname{grad} u, \operatorname{Hess} u) = 0 \quad (2.3.2)$$

რომლის ანალიზური სახე ჩვენთვის უცნობია, მაგრამ ცნობილია, რომ $u(x)$ ნახევრადამოზნექილი (ნახევრადჩაზნექილი) ფუნქციაა ნახევრადამოზნექილობის $c \geq 0$ მუდმივით. დავუშვათ, რომ ხერხდება უცნობი $u(x)$ ფუნქციის თანაბარი $u_\delta(x)$ აპროქსიმაციის აგება, ანუ

$$\|u_\delta(x) - u(x)\|_{L^\infty(D)} \to 0, \ \text{ როცა } \ \delta \to 0.$$

ჩვენი მიზანია უცნობი $u(x)$ ფუნქციის უცნობი $\operatorname{grad} u$ გრადიენტის L^2-აპროქსიმაციის აგება თანაბარი u_δ აპროქსიმაციის მეშვეობით. უფრო მეტიც, სასურველია გაგვაჩნდეს გრადიენტის L^2-მიახლოების შეცდომის შეფასება $u(x)$-ის $L^\infty(D)$ მიახლოების შეცდომის ტერმინებში.

დავინახავთ, რომ ასეთი კონსტრუქცია შესაძლებელია და ის ეყრდნობა ამოზნექილი მომვლების (2.3.1) ცნებასა და (2.2.5) ენერგეტიკულ უტოლობას, ანუ პუანკარეს შებრუნებულ წონიან უტოლობას.

$u \to \Gamma(u)$ ასახვას გააჩნია რამდენიმე საინტერესო თვისება

ლ ე მ ა 2.3.1. *$u \to \Gamma(u)$ ასახვა აკმაყოფილებს ლიფშიცის თვისებას*

$$\|\Gamma(u) - \Gamma(v)\|_{L^\infty(D)} \leq \|u - v\|_{L^\infty(D)} \quad (2.3.3)$$

სადაც $u, v \in C(D) \cap L^\infty(D)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$d = \|u - v\|_{L^\infty(D)},$$

მაშინ გვექნება

$$-d \le u(x) - v(x) \le d,$$

ანუ

$$v(x) - d \le u(x), \quad u(x) - d \le v(x).$$

მაშასადამე, მივიღებთ

$$\Gamma(v) - d \le u, \quad \Gamma(u) - d \le v.$$

ეს ნიშნავს, რომ ამოზნექილი $\Gamma(v)-d$ და $\Gamma(u)-d$ ფუნქციები მაჟორირდებიან სათანადო u, v ფუნქციებით.

ამოზნექილი მომვლების განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$\Gamma(v) - d \le \Gamma(u), \quad \Gamma(u) - d \le \Gamma(v),$$

ანუ

$$-d \le \Gamma(u) - \Gamma(v) \le d.$$

ამრიგად, ვღებულობთ (2.3.3) უტოლობას. □

თუ მასში მიმდევრობით ჩავსვამთ $u = 0$ და $v = 0$, მივიღებთ

$$\begin{cases} \|\Gamma(v)\|_{L^\infty(D)} \le \|v\|_{L^\infty(D)}, \\ \|\Gamma(u)\|_{L^\infty(D)} \le \|u\|_{L^\infty(D)}. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა 2.3.1. *$u \to \Gamma(u)$ ასახვას $C(D) \cap L^\infty(D)$ სივრცეზე გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება*

$$\int\limits_D \big|\operatorname{grad}\Gamma(u) - \operatorname{grad}\Gamma(v)\big|^2 \cdot \frac{d^2_{\partial D}}{n}\, dx \le$$
$$\le 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u - v\|_{L^\infty(D)} \Big(\|u\|_{L^\infty(D)} + \|v\|_{L^\infty(D)}\Big). \tag{2.3.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (2.3.4) უტოლობიდან გვაქვს, რომ $\Gamma(u)$ და $\Gamma(v)$ ამოზნექილი მომვლები შემოსაზღვრულია და ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (2.2.5) ენერგეტიკული უტოლობა

$$\int\limits_D \big|\operatorname{grad}\Gamma(u) - \operatorname{grad}\Gamma(v)\big|^2 \cdot \frac{d^2_{\partial D}}{n}\, dx \le$$
$$\le 5 \operatorname{meas} D \cdot \|\Gamma(u) - \Gamma(v)\|_{L^\infty(D)} \Big(\|\Gamma(u)\|_{L^\infty(D)} + \|\Gamma(v)\|_{L^\infty(D)}\Big). \tag{2.3.6}$$

ლემა 2.3.1 და უტოლობა (2.3.4) ასაბუთებენ წინადადება 2.3.1-ს. □

ახლა განვიხილოთ (2.3.2) განტოლების შემოსაზღვრული $u(x)$ ამონახსნი, რომელიც დაშვების თანახმად ნახევრადამოზნექილია ნახევრადამოზნექილობის $c \ge 0$ მუდმივით და $u_\delta(x)$ მისი შესაბამისი თანაბარი აპროქსიმაციაა

$$\|u_\delta - u\|_{L^\infty(D)} \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.3.7}$$

ახლა განვიხილოთ შემოსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციები

$$u + c \cdot v_0 \ \text{და} \ u_\delta + c \cdot v_0 \tag{2.3.8}$$

და მათი შესაბამისი ამოზნექილი მომვლები

$$\Gamma(u + c \cdot v_0) \ \text{და} \ \Gamma(u_\delta + c \cdot v_0). \tag{2.3.9}$$

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს 2.3 პარაგრაფის ძირითად შედეგს.

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.1. *უცნობი $u(x)$ ფუნქციის უცნობი $\operatorname{grad} u$-თვის სამართლიანია შემდეგი L^2 წონიანი შეფასება*

$$\int\limits_D \Big|\operatorname{grad}(\Gamma(u_\delta + c \cdot v_0) - c \cdot v_0) - \operatorname{grad} u\Big|^2 \cdot \frac{d_{\partial D}^2}{n}\, dx \le$$
$$\le 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u_\delta - u\|_{L^\infty(D)} \times$$
$$\times \Big(2\|u\|_{L^\infty(D)} + \|u_\delta - u\|_{L^\infty(D)} + 2c\|v_0\|_{L^\infty(D)}\Big). \tag{2.3.10}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . $u_\delta + cv_0$ და $u + cv_0$ ფუნქციებისთვის გამოვიყენოთ (2.3.1) წინადადება, გვექნება:

$$\int\limits_D \Big|\operatorname{grad}\Gamma(u_\delta + c \cdot v_0) - \operatorname{grad}\Gamma(u + c \cdot v_0)\Big|^2 \cdot \frac{d_{\partial D}^2}{n}\, dx \le$$
$$\le 5 \operatorname{meas} D \cdot \|u_\delta - u\|_{L^\infty(D)} \times$$
$$\times \Big(\|u_\delta + c \cdot v_0\|_{L^\infty(D)} + \|u + c \cdot v_0\|_{L^\infty(D)}\Big). \tag{2.3.11}$$

(2.2.3) ნახევრადამოზნექილობის კრიტერიუმიდან გამომდინარე $u + c \cdot v_0$ ფუნქცია ამოზნექილია და, მაშასადამე, ემთხვევა მის ამოზნექილ $\Gamma(u + c \cdot v_0)$ მომვლებს. ამგვარად ვღებულობთ:

$$\operatorname{grad}\Gamma(u + c \cdot v_0) = \operatorname{grad}(u + c \cdot v_0) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad}(c \cdot v_0),$$

რითაც თეორემა დამტკიცებულია. □

მაშასადამე, უცნობი ფუნქციის $\operatorname{grad} u$-ს L^2-აპროქსიმაციის ამოცანა დაიყვანება $\Gamma(u_\delta + c \cdot v_0)$ ამოზნექილი მომვლებისა და მისი გრადიენტის ეფექტურ რიცხვით დათვლაზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ უცნობი $u(x)$ ამონახსნი ამოზნექილი ფუნქციაა, მაშინ უცნობი $\operatorname{grad} u$ აპროქსიმირდება $\operatorname{grad}\Gamma(u_\delta)$-ით.

ამ პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ (2.2.5) ენერგეტიკული უტოლობის ერთი გამოყენება.

შეგახსენებთ, რომ ჩაკეტილ $C \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლემდე მანძილის ფუნქცია შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$d_C(x) = \min_{y \in C} |y - x|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.12}$$

ცნობილია (იხ. კანარსა, სინესტრარი [5, წინადადება 2.2.2]), რომ d_C^2 მანძილის კვადრატის ფუნქცია ნახევრადჩაზნექილი ფუნქციაა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ნახევრადამოზნექილობის $c = 2$ მუდმივით.

განვიხილოთ $B \subset \mathbb{R}^n$ ბირთვი და $\mathbb{R}^n$-ის ორი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი C და $\widetilde{C}$ სიმრავლე (კერძოდ, ისინი შეიძლება წარმოადგენდნენ ღია სიმრავლეების საზღვრებს). თუ (2.2.5) ენერგეტიკულ უტოლობაში ჩავსვავთ $(-d_C^2)$ და $(-d_{\widetilde{C}}^2)$ ნახევრადამოზნექილ ფუნქციებს, მაშინ მივიღებთ შემდეგ საინტერესო შეფასებას:

$$\int\limits_B \left| \operatorname{grad} d_C^2 - \operatorname{grad} d_{\widetilde{C}}^2 \right|^2 \cdot \frac{d_{\partial B}^2}{n}\, dx \leq 5 \operatorname{meas} B \cdot \|d_C^2 - d_{\widetilde{C}}^2\|_{L^\infty(B)} \times$$
$$\times \left(\|d_C^2\|_{L^\infty(B)} + \|d_{\widetilde{C}}^2\|_{L^\infty(B)} + 4\|v_0\|_{L^\infty(B)} \right). \quad (2.3.13)$$

თავი 3

პუანკარეს წონიანი შებრუნებული უტოლობა ორი პარაბოლური სუსტი სუბამონახსნის სხვაობისთვის

3.1 შესავალი

სუსტი სუბამონახსნის სობოლევის აზრით რეგულარობა ლაპლასის ოპერატორისთვის კარგად ცნობილი კლასიკური შედეგია. მართლაც, ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი n განზომილებისთვის მრავალი ცვლადის სუბჰარმონიული $u(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციისთვის მისი სობოლევის $\operatorname{grad} u(x)$ გრადიენტის არსებობა და ლოკალური L^2 ინტეგრებადობა დასაბუთებული იქნა ლინდკვისტის [22, თეორემა 3.4] მიერ. სობოლევის გრადიენტის არსებობა საშუალებას გვაძლევს დავასაბუთოთ პუანკარეს შებრუნებული უტოლობა (კაჩიოპოლის ტიპის უტოლობა) ელიფსური და პარაბოლური განტოლებების სუბ და სუპერ ამონახსნებისთვის.

პარაბოლური დიფერენციალური განტოლების სუსტი ამონახსნებისთვის პუანკარეს შებრუნებული უტოლობები დამტკიცებულ იქნა კინუნენისა და ლევისის [23, ლემა 3.2] და პარვიაინენის [24, ლემა 3.2] მიერ. პარაბოლური ტიპის განტოლებებისთვის ფრიდმანმა [25] შემოიყვანა სუსტი სუბამონახსნის ცნება. ამ თავის ძირითადი მიზანია მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი მეორე რიგის პარაბოლური დიფერენციალური განტოლებებისათვის ორი სუბამონახსნის სხვაობისთვის პუანკარეს შებრუნებული უტოლობის დამტკიცება.

ამ თავში დაგვჭირდება შემდეგი აღნიშვნები.

$B = B(x_0, r)$ იყოს ღია ბირთვი ევკლიდურ $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, სივრცეში, x_0 ცენტრით და r რადიუსით, $r > 0$, ხოლო $\overline{B} = \overline{B}(x_0, r)$ იყოს მისი ჩაკეტვა.

$Q(r, s)$ ცილინდრი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $Q(r, s) = B(x_0, r) \times (s, T - s)$, სადაც $(0, T)$ ინტერვალი არის ძირითადი დროითი ინტერვალი, ხოლო s აკმაყოფილებს $0 < s < T/2$ პირობას. შეთანხმებულობისთვის აღვნიშნოთ $Q = B(x_0, r) \times (0, T)$.

$C(Q(r,s))$-ით აღვნიშნოთ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $Q(r,s)$-ზე.

$L^\infty(Q(r,s))$ აღნიშნავს $Q(r,s)$ ცილინდრზე განსაზღვრულ შემოსაზღვრულ (თ. ყ. $dx \times dt$) ფუნქციათა სივრცეს.

$C^{2,1}(\overline{Q}(r,s))$ წარმოადგენს სივრცითი $x = (x_1, \dots, x_n)$ არგუმენტის მიმართ ორჯერ უწყვეტად წარმოებად და დროითი t არგუმენტის მიმართ ერთხელ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სივრცეს $\overline{Q}(r,s)$ ჩაკეტვაზე.

$C_0^{2,1}(Q(r,s))$ სივრცე იყოს უკანასკნელი სივრცის ქვესივრცე, რომელიც შედგება $Q(r,s)$ ცილინდრზე განსაზღვრული კომპაქტური მზიდის მქონე ფუნქციებისგან.

3.2 სუსტი პარაბოლური სუბამონახსნების გაგლუვება

$Q = B(x_0, R) \times (0,T)$ ცილინდრზე განვიხილოთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი, პარაბოლური კერძოწარმოებული დიფერენციალური ოპერატორი:

$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + cu(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,, \tag{3.2.1}$$

სადაც $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1, \dots, n$, და მისი შეუღლებული ოპერატორი:

$$L^* u(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + cu(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,, \tag{3.2.2}$$

იგულისხმება, რომ Lu ოპერატორი თანაბრად პარაბოლურია, ანუ

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \geq \alpha |y|^2, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.3}$$

$\alpha > 0$ პარაბოლურობის მუდმივით.

$Q = B(x_0, R) \times (0,T)$ ცილინდრზე განსაზღვრულ შემოსაზღვრულ ზომად $u(x,t)$ ფუნქციას ეწოდება

$$Lv(x,t) = 0 \tag{3.2.4}$$

განტოლების სუსტი პარაბოლური სუბამონახსნი Q ცილინდრში, თუ $C_0^{2,1}(Q)$ სივრცის ყოველი არაუარყოფითი $v(x,t)$ ფუნქციისთვის სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\int_0^T \int_B u(x,t)\, L^* v(x,t)\, dx\, dt \geq 0. \tag{3.2.5}$$

ჩვენ დაგვჭირდება (3.2.4) განტოლების სუსტი სუბამონახსნების აპროქსიმაცია გლუვი სუბამონახსნებით და ამ მიზნით ჩვენ გამოვიყენებთ აპროქსიმაციის კლასიკურ ტექნიკას (იხ. გილბარგი და ტრუდინგერი [17, თავი 7]).

შემოვიღოთ

$$\rho_n(z) = \begin{cases} c\exp\Big(\dfrac{1}{|z|^2-1}\Big), & \text{თუ } \ |z|<1, \\ 0, & \text{თუ } \ |z|\geq 1, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

სადაც $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, ხოლო $c>0$ მუდმივი განისაზღვრება $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho_n(z)\,dz=1$ ტოლობიდან.

განვიხილოთ Q ცილინდრზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ზომადი $u(x,t)$ ფუნქციის გაგლუვება

$$u_h(x,t) = h^{-(n+1)}\int\limits_0^T\int\limits_B \rho_n\Big(\frac{x-y}{h}\Big)\rho_1\Big(\frac{t-s}{h}\Big)u(y,s)\;dy\,ds \tag{3.2.7}$$

ნებისმიერი $h>0$-თვის.

აღვნიშნოთ

$$\rho_h(x-y,t-s) = h^{-(n+1)}\rho_n\Big(\frac{x-y}{h}\Big)\rho_1\Big(\frac{t-s}{h}\Big),$$

მაშინ ცხადია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\,\rho_h(x-y,t-s) &= -\frac{\partial}{\partial y_i}\,\rho_h(x-y,t-s), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\,\rho_h(x-y,t-s) &= \frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\,\rho_h(x-y,t-s), \\ \frac{\partial}{\partial t}\,\rho_h(x-y,t-s) &= -\frac{\partial}{\partial s}\,\rho_h(x-y,t-s). \end{aligned}$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან ადვილად ვღებულობთ

$$L_{x,t}\rho_h(x-y,t-s) = L^*_{y,s}\rho_h(x-y,t-s), \tag{3.2.8}$$

სადაც $L_{x,t}$ და $L^*_{y,s}$ აღნიშნავს დიფერენციალური ოპერატორების აღებას (x,t) და (y,s) ცვლადების მიმართ, შესაბამისად.

თუ (3.2.8) ტოლობასა და (3.2.7) განსაზღვრას მივიღებით მხედველობაში, მივდივართ შემდეგ საინტერესო ტოლობაზე

$$L_{x,t}u_h(x,t) = \int\limits_0^T\int\limits_B u(y,s)L^*_{y,s}\rho_h(x-y,t-s)\;dy\,ds \tag{3.2.9}$$

ნებისმიერი $h>0$-თვის.

ვთქვათ,

$$r_k = \frac{k+1}{k+2}\,R, \quad k=1,2,\dots\,.$$

და განვსაზღვროთ ცილინდრები

$$Q_k = Q\Big(r_k,\frac{T}{k+2}\Big) = B(x_0,r_k)\times\Big(\frac{T}{k+2}\,,\frac{k+1}{k+2}\,T\Big), \tag{3.2.10}$$

შემდეგი თეორემა ასაბუთებს, რომ ყოველ Q_k ცილინდრში, $u_h(x,t)$ ფუნქციები წარმოადგენენ გლუვ პარაბოლურ სუბამონახსნებს, საკმარისად მცირე h-თვის.

თ ე ო რ ე მ ა 3.2.1. *$Q = B(x_0,R) \times (0,T)$ ცილინდრში განვიხილოთ სუსტი პარაბოლური $u(x,t)$ სუბამონახსნი. მაშინ ყოველი k-თვის, $k = 1,2,\ldots$, არსებობს ისეთი $\widehat{h} > 0$, რომ თუ $0 < h < \widehat{h}$ ყველა $u_h(x,t)$ ფუნქცია წარმოადგენს გლუვ პარაბოლურ სუბამონახსნს Q_k ცილინდრში, ანუ*

$$Lu_h(x,t) \geq 0, \quad \textit{თუ} \ (x,t) \in Q_k. \tag{3.2.11}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ყოველი k-თვის, $k = 1,2,\ldots$, შემოვიღოთ განსაზღვრა

$$\widehat{h} = \min\Big(\frac{R}{2(k+2)}\,, \frac{T}{2(k+2)}\Big). \tag{3.2.12}$$

კარგად არის ცნობილი, რომ ნებისმიერი $h > 0$-თვის $u_h(x,t)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიფერენცირებადია მისი (x,t) არგუმენტების მიმართ $\mathbb{R}^{n+1}$-ში.

შევამოწმოთ, რომ ნებისმიერი $(x,t) \in Q_k$-თვის $\rho_h(x-y,t-s)$ არის კომპაქტური მზიდის მქონე ფუნქცია Q ცილინდრში, როგორც (y,s) წყვილის ფუნქცია.

მართლაც, განვსაზღვროთ $\widehat{Q}_k$ ცილინდრი შემდეგნაირად

$$\widehat{Q}_k = B\Big(x_0, \frac{2k+3}{2k+4}\,R\Big) \times \Big(\frac{T}{2k+4}\,, \frac{2k+3}{2k+4}\,T\Big). \tag{3.2.13}$$

განვიხილოთ $(y,s) \notin \widehat{Q}_k$ წყვილი, მაშინ ან $y \notin B\big(x_0, \frac{2k+3}{2k+4}\,R\big)$ ანდა $s \notin B\big(\frac{T}{2k+4}\,, \frac{2k+3}{2k+4}\,T\big)$.

პირველ შემთხვევაში გვაქვს

$$|y-x| > \Big(\frac{2k+3}{2k+4} - \frac{2k+2}{2k+4}\Big)R = \frac{1}{2(k+2)}\,R > h,$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$|t-s| > \Big(\frac{2}{2k+4} - \frac{1}{2k+4}\Big)T > h,$$

მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში ვასკვნით $\rho_h(x-y,t-s) = 0$. აქედან ვღებულობთ, რომ არაუარყოფით გლუვ $\rho_h(x-y,t-s)$ ფუნქციას, როგორც (y,s) წყვილის ფუნქციას გააჩნია კომპაქტური მზიდი Q ცილინდრში, თუ $h < \widehat{h}$ და, მაშასადამე, სუსტი პარაბოლური $u(x,t)$ სუბამონახსნის განმარტებიდან ვღებულობთ

$$\int_0^T \int_B u(y,s) L^*_{y,s} \rho_h(x-y,t-s)\, dy\, ds \geq 0. \tag{3.2.14}$$

სხვა სიტყვებით (3.2.9) ტოლობიდან ვასკვნით, რომ $Lu_h(x,t) \geq 0$, თუ $(x,t) \in Q_k$ და $h < \widehat{h}$. $\square$

3.3 გლუვი პარაბოლური სუბამონახსნების შემთხვევა

ჩვენ ვიწყებთ კლასიკური გრინის იგივეობით (იხ. ფრიდმანი [33, თავი 6, პარაგრაფი 4])

$$\begin{aligned} h(x,t)\,Lu(x,t) - u(x,t)\,L^*h(x,t) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[\sum_{j=1}^{n}\left(h(x,t)a_{ij}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} - u(x,t)a_{ij}\,\frac{\partial h(x,t)}{\partial x_j}\right)+ \\ + b_i u(x,t)h(x,t)\Bigg] - \frac{\partial}{\partial t}\big(u(x,t)h(x,t)\big), \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

სადაც $h(x,t)$ და $u(x,t)$ მოცემული $Q(r,s)$ ცილინდრისთვის ეკუთვნიან $C^{2,1}(Q(r,s))$ სივრცეს.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ კონკრეტული სახის გლუვ $h(x,t)$ წონის ფუნქციას.

$$\begin{aligned} h(x,t) = \big(r^2 - |x-x_0|^2\big)(t-s)(T-s-t), \;\; x \in \overline{B}(x_0,r), \\ s \le t \le T-s. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

გვაქვს

$$\begin{cases} h(x,t) > 0, & \text{თუ} \;\; (x,t) \in Q(r,s), \\ h(x,t) = 0, & \text{თუ} \;\; x \in \partial B \;\; \text{ან} \;\; t \in \{s; T-s\}. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

ეს პარაგრაფი ეძღვნება შემდეგი თეორემის დამტკიცებას.

თ ე ო რ ე მ ა 3.3.1. *$Q(r,s)$ ცილინდრში განვიხილოთ ორი ნებისმიერი გლუვი $u_i(x,t)$, $i=1,2$, პარაბოლური სუბამონახსნი, ანუ $u_i(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}(r,s))$, $i=1,2$, და*

$$Lu_i(x,t) \ge 0, \;\; \textit{თუ} \;\; (x,t) \in Q(r,s), \;\; i=1,2. \tag{3.3.4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (3.2.3) *თანაბრად პარაბოლურობის პირობა. მაშინ ორი გლუვი $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, პარაბოლური სუბამონახსნის $u_2(x,t) - u_1(x,t)$ სხვაობისთვის სამართლიანია შემდეგი ენერგეტიკული უტოლობა*

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q(r,s)} \Big|\operatorname{grad} u_2(x,t) - \operatorname{grad} u_1(x,t)\Big|^2 h(x,t)\,dx\,dt \le \\ \le \frac{1}{\alpha}\int\limits_{Q(r,s)} \Big(\big|L^*h(x,t)\big| + |c|h(x,t)\Big)\,dx\,dt\times \\ \times\Big[2\|u_2-u_1\|_{L^\infty(Q(r,s))}\Big(\|u_1\|_{L^\infty(Q(r,s))} + \|u_2\|_{L^\infty(Q(r,s))}\Big)+ \\ + \|u_2-u_1\|^2_{L^\infty(Q(r,s))}\Big] \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ ნებისმიერი გლუვი $u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}(r,s))$ ფუნქცია და ფიქსირებული t-თვის, $s<t<T$, ვაინტეგროთ იგივეობა (3.3.1) x არგუმენტის მიმართ $B(x_0,r)$ ბირთვზე, მაშინ გაუს–ოსტროგრაცკის დივერგენციის თეორემიდან ვღებულობთ

$$
\begin{aligned}
\int\limits_B Lu(x,t)h(x,t)\,dx &= \int\limits_B u(x,t)\,L^*h(x,t)\,dx+ \\
&+\int\limits_{\partial B}\sum_{i=1}^n\Big[\sum_{j=1}^n\Big(h(x,t)a_{ij}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}-u(x,t)a_{ij}\,\frac{\partial h(x,t)}{\partial x_j}\Big)n_i(x)+ \\
&\qquad+b_iu(x,t)h(x,t)n_i(x)\Big]\,d\sigma-\int\limits_B\frac{\partial}{\partial t}\big(u(x,t)h(x,t)\big)\,dx, \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

სადაც $n(x)=(n_i(x))_{i=1,\dots,n}$ წარმოადგენს $x\in\partial B$ წერტილში გარეთ მიმართულ ერთეულოვან ნორმალურ ვექტორს, ხოლო $d\sigma$ – B ბირთვის $(n-1)$ განზომილებიან ზედაპირულ ზომას.

აღვნიშნოთ $\nu_a(x)=(\nu_{ai}(x))_{i=1,\dots,n}$, სადაც

$$
\nu_{ai}(x)=\sum_{j=1}^n a_{ji}n_j(x),\quad i=1,\dots,n. \qquad (3.3.7)
$$

(3.2.3) თანაბრად პარაბოლურობის პირობიდან ვღებულობთ

$$
\big(\nu_a(x),n(x)\big)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}n_i(x)n_j(x)\ge\alpha|n(x)|^2=\alpha>0. \qquad (3.3.8)
$$

აქედან ∂B საზღვრის ნებისმიერი x წერტილისთვის გვაქვს

$$
\big(\operatorname{grad}h(x,t),\nu_a(x)\big)=\lim_{s\downarrow 0}\frac{h(x,t)-h(x-s\nu_a(x),t)}{s}\le 0. \qquad (3.3.9)
$$

გადავწეროთ (3.3.6) მოხერხებული ფორმით და მხედველობაში მივიღოთ, რომ წონის $h(x,t)$ ფუნქცია ნულდება ∂B საზღვარზე, გვექნება

$$
\begin{aligned}
\int\limits_B Lu(x,t)h(x,t)\,dx &= \int\limits_B u(x,t)\,L^*h(x,t)\,dx- \\
&-\int\limits_{\partial B}u(x,t)\big(\operatorname{grad}h(x,t),\nu_a(x)\big)\,d\sigma-\int\limits_B\frac{\partial}{\partial t}\big(u(x,t)h(x,t)\big)\,dx, \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

სადაც $s<t<T-s$. თუ ბოლო (3.3.10) თანაფარდობას ვაინტეგრებთ t არგუმენტის

მიმართ $(s,T-s)$ ინტერვალში, მივიღებთ

$$\int\limits_{Q(r,s)} Lu(x,t)h(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q(r,s)} u(x,t)\,L^*h(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_s^{T-s}\int\limits_{\partial B} u(x,t)\big(\operatorname{grad} h(x,t),\nu_a(x)\big)\,d\sigma\,dt -$$

$$- \int\limits_B \big[u(x,t)h(x,t)\big]\Big|_s^{T-s}\,dx \qquad (3.3.11)$$

და ვინაიდან $h(x,s)=h(x,T-s)=0$, მივდივართ გრინის მეორე ფორმულაზე

$$\int\limits_{Q(r,s)} Lu(x,t)h(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{Q(r,s)} u(x,t)\,L^*h(x,t)\,dx\,dt-$$

$$- \int\limits_s^{T-s}\int\limits_{\partial B} u(x,t)\big(\operatorname{grad} h(x,t),\nu_a(x)\big)\,d\sigma\,dt. \qquad (3.3.12)$$

უკანასკნელ ფორმულაში ავიღოთ $u(x,t)=1$, მაშინ გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\int\limits_s^{T-s}\int\limits_{\partial B} \big(\operatorname{grad} h(x,t),\nu_a(x)\big)\,d\sigma\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q(r,s)} \big(L^*h(x,t)-ch(x,t)\big]\big)\,dx\,dt. \qquad (3.3.13)$$

თუ გრინის (3.3.12) მეორე ფორმულაში $u(x,t)$ ფუნქციის ნაცვლად ჩავსვამთ $u^2(x,t)$ ფუნქციას, გვექნება

$$\int\limits_{Q(r,s)} Lu^2(x,t)h(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{Q(r,s)} u^2(x,t)\,L^*h(x,t)\,dx\,dt-$$

$$- \int\limits_s^{T-s}\int\limits_{\partial B} u^2(x,t)\big(\operatorname{grad} h(x,t),\nu_a(x)\big)\,d\sigma\,dt. \qquad (3.3.14)$$

მარტივი გამოსათვლელია, რომ

$$Lu^2(x,t) =$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + 2u(x,t)\,Lu(x,t) - cu^2(x,t). \qquad (3.3.15)$$

ამგვარად, (3.3.14) ტოლობიდან მივდივართ შემდეგ უტოლობაზე

$$2\alpha \int\limits_{Q(r,s)} \big|\operatorname{grad} u(x,t)|^2 h(x,t)\, dx\, dt \leq$$

$$\leq 2\|u\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} |Lu(x,t)| h(x,t)\, dx\, dt +$$

$$+ \|u^2\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} \Big(\big|L^* h(x,t)\big| + |c| h(x,t)\Big)\, dx\, dt +$$

$$+ \|u^2\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{s}^{T-s} \int\limits_{\partial B} \Big|\big(\operatorname{grad} h(x,t), \nu_a(x)\big)\Big|\, d\sigma\, dt. \quad (3.3.16)$$

(3.3.9)-დან ვიცით, რომ ყოველი $x \in \partial B$ წერტილისთვის

$$\big(\operatorname{grad} h(x,t), -\nu_a(x)\big) \geq 0,$$

მაშასადამე, (3.3.13) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\int\limits_{s}^{T-s} \int\limits_{\partial B} \Big|\big(\operatorname{grad} h(x,t), \nu_a(x)\big)\Big|\, d\sigma\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q(r,s)} \big(-L^* h(x,t) + c h(x,t)\big)\, dx\, dt. \quad (3.3.17)$$

(3.3.16), (3.3.17) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\alpha \int\limits_{Q(r,s)} \big|\operatorname{grad} u(x,t)\big|^2 h(x,t)\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \|u\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} |Lu(x,t)| h(x,t)\, dx\, dt +$$

$$+ \|u^2\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} \Big(\big|L^* h(x,t)\big| + |c| h(x,t)\Big)\, dx\, dt. \quad (3.3.18)$$

$u(x,t)$ ფუნქცია აქამდე წარმოადგენდა $C^{2,1}(\overline{Q}(r,s))$ სივრცის ნებისმიერ ელემენტს, ხოლო ამ მომენტიდან დაწყებული ვიგულისხმებთ, რომ

$$u(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t), \quad (3.3.19)$$

სადაც $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, წარმოადგენენ თეორემა 3.2.1-ის ფორმულირებაში შემავალ ორ ნებისმიერ პარაბოლურ სუბამონახსნს. გვაქვს

$$|Lu(x,t)| = \big|Lu_2(x,t) - Lu_1(x,t)\big| \leq L\big(u_1(x,t) + u_2(x,t)\big), \quad (3.3.20)$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int\limits_{Q(r,s)} |Lu(x,t)|h(x,t)\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q(r,s)} L\big(u_1(x,t)+u_2(x,t)\big)h(x,t)\,dx\,dt. \quad (3.3.21)$$

გრინის მეორე (3.3.12) ფორმულიდან გვაქვს

$$\int\limits_{Q(r,s)} L\big(u_1(x,t)+u_2(x,t)\big)h(x,t)\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \|u_1+u_2\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} \big|L^*h(x,t)\big|\,dx\,dt +$$

$$+\|u_1+u_2\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} \Big(\big|L^*h(x,t)\big| + |c|h(x,t)\Big)\,dx\,dt \leq$$

$$\leq 2\|u_1+u_2\|_{L^\infty(Q(r,s))} \int\limits_{Q(r,s)} \Big(\big|L^*h(x,t)\big| + |c|h(x,t)\Big)\,dx\,dt. \quad (3.3.22)$$

(3.3.18) და (3.3.22) შეფასებებიდან ვღებულობთ (3.3.5) სასურველ უტოლობას. $\square$

3.4 სობოლევის გრადიენტის არსებობა და ინტეგრებადობა, ძირითადი შედეგის დამტკიცება

ამ პარაგრაფში სისტემატურად გამოვიყენებთ მეორე პარაგრაფის აპროქსიმაციის ტექნიკას. გავიხსენოთ Q_k, $k=1,2,\dots$, ცილინდრების განმარტება

$$Q_k = Q\Big(r_k, \frac{T}{k+2}\Big) = B(x_0, r_k) \times \Big(\frac{T}{k+2}, \frac{k+1}{k+2}\,T\Big), \quad (3.4.1)$$

სადაც $r_k = \frac{k+1}{k+2}\,R$.

შემოვიყვანოთ სათანადო გლუვი წონის ფუნქციები

$$h_k(x,t) = \big(r_k^2 - |x-x_0|^2\big)\Big(t - \frac{T}{k+2}\Big)\Big(\frac{k+1}{k+2}\,T - t\Big), \quad (3.4.2)$$
$$(x,t) \in \overline{Q}_k, \quad k = 1, 2 \dots .$$

$Q = B(x_0, R) \times (0, T)$ ცილინდრისთვის შემოვიყვანოთ ძირითადი გლუვი $h(x,t)$ წონის ფუნქცია

$$h(x,t) = \big(R^2 - |x-x_0|^2\big)\,t(T-t), \quad (x,t) \in \overline{Q}. \quad (3.4.3)$$

ახლა ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ უწყვეტ სუსტ პარაბოლურ $u(x,t)$ სუბამონახსნს, განსაზღვრულს Q ცილინდრში, გააჩნია პირველი რიგის ყველა სუსტი (სობოლევის) წარმოებულები

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\,, \quad i = 1, \dots, n.$$

უფრო მეტიც, $u(x,t)$ ფუნქციის სობოლევის გრადიენტი აღმოჩნდება კვადრატით ინტეგრებადი $h(x,t)$ წონის ფუნქციის მიმართ.

თ ე ო რ ე მ ა 3.4.1. *დავუშვათ შესრულებულია (3.2.3) პირობა. მაშინ $Q = B(x_0, R) \times (0,T)$ ცილინდრში ნებისმიერ სუსტ $u(x,t)$ პარაბოლურ სუბამონახსნს გააჩნია პირველი რიგის ყველა სუსტი წარმოებული $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. ეს წარმოებულები კვადრატით ინტეგრებადია წონის $h(x,t)$ ფუნქციის მიმართ, ანუ*

$$\int\limits_Q \left|\operatorname{grad} u(x,t)\right|^2 h(x,t)\, dx\, dt < \infty. \tag{3.4.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ სუსტი პარაბოლური $u(x,t)$ სუბამონახსნის $u_h(x,t)$ გაგლუვებები, რომლებიც განსაზღვრულია (3.2.7) ფორმულით. რადგან $u(x,t)$ ფუნქცია უწყვეტია Q ცილინდრში, როგორც კარგადაა ცნობილი (იხ. ევანსი [6, დამატება C]), ადგილი აქვს თანაბარ კრებადობას

$$\sup_K \left|u_h(x,t) - u(x,t)\right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Q ცილინდრში შემავალ ნებისმიერ K კომპაქტზე, $K \subset Q$.

$h = \frac{1}{m}$-თვის, $m = 1, 2, \dots$, $u_h(x,t)$ ფუნქციები აღვნიშნოთ $u_m(x,t)$-ით. მაშინ უკანასკნელი თანაბარი კრებადობა ღებულობს შემდეგ სახეს

$$\sup_K \left|u_m(x,t) - u(x,t)\right| \underset{m\to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4.5}$$

ვინაიდან Q_k ცილინდრები კომპაქტურად არის ჩადგმული თავდაპირველ ცილინდრში, თეორემა 3.2.1-დან ვღებულობთ, რომ ყოველი $k = 1, 2, \dots$-თვის არსებობს ისეთი $m(k)$ ინდექსი, რომ, თუ $m \geq m(k)$ ყოველი $u_m(x,t)$ ფუნქცია წარმოადგენს გლუვ პარაბოლურ სუბამონახსნს Q_k ცილინდრში.

ნებისმიერი k და l-თვის განვიხილოთ Q_{k+l} ცილინდრი. თუ (3.3.5) უტოლობაში ავიღებთ

$$u_1(x,t) = u_m(x,t), \quad u_2(x,t) = u_p(x,t), \;\; m, p \geq m(k+l),$$

და Q_{k+l} ცილინდრს, გვექნება

$$\int\limits_{Q_{k+l}} \Big|\operatorname{grad} u_p(x,t) - \operatorname{grad} u_m(x,t)\Big|^2 h_{k+l}(x,t)\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{Q_{k+l}} \Big(\big|L^* h_{k+l}(x,t)\big| + |c| h_{k+l}(x,t)\Big)\,dx\,dt \times$$

$$\times \Big[2\|u_p - u_m\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big(\|u_m\|_{L^\infty(Q_{k+l})} + \|u_p\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big) +$$

$$+ \|u_p - u_m\|^2_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big]. \tag{3.4.6}$$

აღვნიშნოთ

$$c_{k+l} = \int\limits_{Q_{k+l}} \Big(\big|L^* h_{k+l}(x,t)\big| + |c| h_{k+l}(x,t)\Big)\,dx\,dt \tag{3.4.7}$$

და შევნიშნოთ, რომ

$$\widehat{c}_{k+l} = \inf_{(x,t)\in Q_k} h_{k+l}(x,t) > 0. \tag{3.4.8}$$

თუ (3.4.6) უტოლობის მარცხენა მხარეს შევზღუდავთ Q_k ცილინდრზე, გვექნება

$$\widehat{c}_{k+l} \int\limits_{Q_k} \Big|\operatorname{grad} u_p(x,t) - \operatorname{grad} u_m(x,t)\Big|^2\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\, c_{k+l}\Big[2\|u_p - u_m\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big(\|u_m\|_{L^\infty(Q_{k+l})} + \|u_p\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big) +$$

$$+ \|u_p - u_m\|^2_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big]. \tag{3.4.9}$$

(3.4.5)-დან გვაქვს

$$\|u_p - u_m\|_{L^\infty(Q_{k+l})} \longrightarrow 0, \quad \text{თუ} \;\; m,p \to \infty. \tag{3.4.10}$$

თუ (3.4.9)-ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m,p \to \infty$, მივიღებთ

$$\lim_{m,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_k} \Big(\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x_i}\Big)^2\,dx\,dt = 0. \tag{3.4.11}$$

$L^2(Q_k)$ სივრცის სისრულის გამო არსებობს ზომად ფუნქციათა $v_{k,i}(x,t) \in L^2(Q_k)$, $i = 1,\dots,n$, ოჯახი ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_k} \Big(\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x_i} - v_{k,i}(x,t)\Big)^2\,dx\,dt = 0, \quad k = 1,2,\dots. \tag{3.4.12}$$

$v_{k,i}(x,t)$ ფუნქციები განვავრცოთ Q_k ცილინდრის გარეთ ტრივიალურად 0-ის ტოლი მნიშვნელობით და თავდაპირველ Q ცილინდრზე განვსაზღვროთ $v_i(x,t)$, $i = 1,\dots,n$, ფუნქციები შემდეგი სახით

$$v_i(x,t) = \limsup_{k\to\infty} v_{k,i}(x,t), \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.4.13}$$

ცხადია, რომ $v_{k+l,i}(x,t)$, $l=0,1,2,\ldots$, ფუნქციები ერთმანეთის ტოლია Q_k ცილინდრზე და ამიტომ გვაქვს

$$v_i(x,t)=v_{k,i}(x,t) \text{ (თ. ყ. } dx\times dt) \ Q_k\text{-ცილინდრზე.} \tag{3.4.14}$$

ამგვარად, $v_i(x,t)$, $i=1,\ldots,n$, ფუნქციები ლოკალურად კვადრატით ინტეგრებადია Q ცილინდრზე.

შევამოწმოთ, რომ $v_i(x,t)$, $i=1,\ldots,n$, ფუნქციები წარმოადგენენ $u(x,t)$ ფუნქციის პირველი რიგის სუსტ (სობოლევის) კერძო წარმოებულებს. ავიღოთ ნებისმიერი უსასრულოდ დიფერენცირებადი $\varphi(x,t)$ ფუნქცია კომპაქტური მზიდით Q ცილინდრში (ანუ $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(Q)$). მაშინ $\operatorname{supp}\varphi(x,t)$ შედის Q_k-ში რომელიმე k-თვის. ყოველი $m\geq m(k)$-თვის გვექნება

$$\int\limits_{Q_k}\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x_i}\,\varphi(x,t)\,dx\,dt=-\int\limits_{Q_k}u_m(x,t)\,\frac{\partial\varphi_m(x,t)}{\partial x_i}\,dx\,dt$$

მაგრამ ფუნქციათა $u_m(x,t)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $u(x,t)$ ფუნქციისკენ Q_k ცილინდრში, ხოლო $\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x_i}$ კრებადია $v_i(x,t)$ ფუნქციისკენ $L^2(Q_k)$-ში. მაშასადამე, შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა წინა ტოლობაში, როცა $m\to\infty$, საიდანაც ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობას

$$\int\limits_{Q_k}v_i(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt=-\int\limits_{Q_k}u(x,t)\,\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i}\,dx\,dt. \tag{3.4.15}$$

უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ $v_i(x,t)$, $i=1,\ldots,n$, ფუნქციები ნამდვილად წარმოადგენენ $u(x,t)$ ფუნქციის პირველი რიგის სუსტ კერძო წარმოებულებს. დავწეროთ (3.3.5) უტოლობა $u_1(x,t)=0$ და $u_2(x,t)=u_m(x,t)$ ფუნქციებისთვის, $m\geq m(k+l)$, და Q_{k+l} ცილინდრისთვის. გვაქვს

$$\int\limits_{Q_{k+l}}\left|\operatorname{grad}u_m(x,t)\right|^2h_{k+l}(x,t)\,dx\,dt\leq\frac{c_{k+l}}{\alpha}\cdot 3\|u_m(x,t)\|^2_{L^\infty(Q_{k+l})}. \tag{3.4.16}$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, გვექნება

$$\int\limits_{Q_{k+l}}\left|\operatorname{grad}u(x,t)\right|^2h_{k+l}(x,t)\,dx\,dt\leq\frac{c_{k+l}}{\alpha}\cdot 3\|u(x,t)\|^2_{L^\infty(Q_{k+l})}.$$

თუ ამ უტოლობის მარცხენა მხარეს შევზღუდავთ Q_k ცილინდრზე და შემდეგ l-ს მივასწრაფებთ უსასრულობაში, გვექნება

$$\int\limits_{Q_k}\left|\operatorname{grad}u(x,t)\right|^2h(x,t)\,dx\,dt\leq\frac{c_\infty}{\alpha}\cdot 3\|u(x,t)\|^2_{L^\infty(Q)}<\infty, \tag{3.4.17}$$

სადაც
$$c_\infty = \int\limits_Q \Big(\big|L^* h(x,t)\big| + |c| h(x,t)\Big)\,dx\,dt. \tag{3.4.18}$$

ვინაიდან, (3.4.17) უტოლობის მარცხენა მხარე ზრდადია k-ს მიმართ და შემოსაზღვრულია მას აქვს სასრული ზღვარი. ამრიგად, ვღებულობთ
$$\int\limits_Q \big|\operatorname{grad} u(x,t)\big|^2 h(x,t)\,dx\,dt \le \frac{3c_\infty}{\alpha}\,\|u(x,t)\|^2_{L^\infty(Q)} < \infty. \quad \square \tag{3.4.19}$$

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ ამ თავის ძირითად შედეგს.

თ ე ო რ ე მ ა 3.4.2 (პუანკარეს წონიანი შებრუნებული უტოლობა). *დავუშვათ, რომ სრულდება თანაბრად პარაბოლურობის* (3.2.3) *პირობა.* $Q = B(x_0,R)\times(0,T)$ *ცილინდრში განვიხილოთ ორი ნებისმიერი უწყვეტი სუსტი პარაბოლური* $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, *სუბამონახსნი. მაშინ სამართლიანია შემდეგი პუანკარეს წონიანი შებრუნებული უტოლობა* $u_2(x,t) - u_1(x,t)$ *სხვაობისთვის*
$$\begin{aligned}\int\limits_Q \Big|\operatorname{grad} u_2(x,t) - \operatorname{grad} u_1(x,t)\Big|^2 h(x,t)\,dx\,dt \le \\ \le \frac{1}{\alpha}\int\limits_Q \Big(\big|L^* h(x,t)\big| + |c| h(x,t)\Big)\,dx\,dt \times \\ \times\Big[2\|u_2-u_1\|_{L^\infty(Q)}\big(\|u_1\|_{L^\infty(Q)} + \|u_2\|_{L^\infty(Q)}\big) + \|u_2-u_1\|^2_{L^\infty(Q)}\Big].\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3.4.1. (3.4.20) უტოლობა შესაძლებლობას გვაძლევს შევაფასოთ ორი უწყვეტი სუსტი პარაბოლური სუბამონახსნის გრადიენტებს შორის L^2 მანძილი, ამ სუბამონახსნებს შორის თანაბარი მანძილის მეშვეობით.

თ ე ო რ ე მ ა 3.4.2 - ი ს დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, უწყვეტი სუსტი პარაბოლური სუბამონახსნების $u_{m,i}(x,t)$, $i = 1,2$, გაგლუვებები.

როგორც ჩვენთვის ცნობილია, Q_{k+l} ცილინდრისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური $m(k+l)$ ინდექსი, რომ, როდესაც $m \ge m(k+l)$-ზე ყოველი $u_{m,i}(x,t)$, $i = 1,2$, ფუნქცია წარმოადგენს გლუვ პარაბოლურ სუბამონახსნს Q_{k+l} ცილინდრში. აგრეთვე გვაქვს შემდეგი თანაბარი კრებადობა
$$\big\|u_{m,i}(x,t) - u_i(x,t)\big\|_{L^\infty(Q_{k+l})} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1,2. \tag{3.4.21}$$

გამოვიყენოთ (3.3.5) უტოლობა Q_{k+l} ცილინდრისა და $u_{m,1}(x,t)$ და $u_{m,2}(x,t)$ ფუნქციე-

ბისთვის. გვექნება

$$\int\limits_{Q_{k+l}} \Big|\operatorname{grad} u_{m,2}(x,t) - \operatorname{grad} u_{m,1}(x,t)\Big|^2 h_{k+l}(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \frac{c_{k+l}}{\alpha}\Big[2\|u_{m,2}-u_{m,1}\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\big(\|u_{m,1}\|_{L^\infty(Q_{k+l})}+\|u_{m,2}\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\big)+$$
$$+\|u_{m,2}-u_{m,1}\|^2_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big]. \qquad (3.4.22)$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ

$$\int\limits_{Q_{k+l}} \Big|\operatorname{grad} u_2(x,t) - \operatorname{grad} u_1(x,t)\Big|^2 h_{k+l}(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \frac{c_{k+l}}{\alpha}\Big[2\|u_2-u_1\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\big(\|u_1\|_{L^\infty(Q_{k+l})}+\|u_2\|_{L^\infty(Q_{k+l})}\big)+$$
$$+\|u_2-u_1\|^2_{L^\infty(Q_{k+l})}\Big]. \qquad (3.4.23)$$

(3.4.23) უტოლობის მარცხენა მხარე შევზღუდოთ Q_k ცილინდრზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $l\to\infty$, გვექნება

$$\int\limits_{Q_k} \Big|\operatorname{grad} u_2(x,t) - \operatorname{grad} u_1(x,t)\Big|^2 h(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \frac{c_\infty}{\alpha}\Big[2\|u_2-u_1\|_{L^\infty(Q)}\big(\|u_1\|_{L^\infty(Q)}+\|u_2\|_{L^\infty(Q)}\big)+$$
$$+\|u_2-u_1\|^2_{L^\infty(Q)}\Big]. \qquad (3.4.24)$$

ამასთან, თეორემა 3.3.1-ის თანახმად, სასრულია შემდეგი ინტეგრალები

$$\int\limits_Q \big|\operatorname{grad} u_i(x,t)\big|^2 h(x,t)\,dx\,dt < \infty, \quad i=1,2. \qquad (3.4.25)$$

გადავიდეთ (3.4.24) უტოლობაში ზღვარზე, როცა $k\to\infty$. საბოლოოდ, მივიღებთ სასურველ (3.4.20) შეფასებას. □

თავი 4

გამოთვლითი ამოზნექილი ანალიზი და მისი გამოყენება ზოგიერთი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისთვის

4.1 შესავალი

ამ თავში განვიხილავთ ამოზნექილი ანალიზის ისეთი ფუნდამენტალური გარდაქმნების გამოყენებას ზოგიერთი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისთვის, როგორიცაა ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნა, მოროს მომვლები და მოცემული ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები.

მრავალი ცვლადის ნამდვილმნიშვნელობებიანი $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ფუნქციის ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნა განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \big((x,y) - f(y)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1.1}$$

სადაც (x,y) აღნიშნავს x და y ვექტორების, $x, y \in \mathbb{R}^n$, სკალარულ ნამრავლს. სამეცნიერო ლიტერატურაში მას აგრეთვე უწოდებენ მოცემული ფუნქციის ამოზნექილ შეუღლებულს ანდა ფენხელის შეუღლებულს.

მრავალი ცვლადის ნამდვილმნიშვნელობებიანი $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ფუნქციის მოროს მომვლები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$M_\lambda f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left(f(y) + \frac{|x-y|^2}{2 \cdot \lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1.2}$$

სადაც $\lambda > 0$ მკაცრად დადებითი ნამდვილი რიცხვია.

ფენხელის შეუღლებულს დიდი ხანია სწავლობენ მრავალი მეცნიერული მიმართულებით მისი განსაკუთრებული დუალური თვისებების გამო. რაც შეეხება მოროს მომვლებს მას ინტენსიურად სწავლობდნენ როგორც თეორიული, ასევე ალგორითმული თვალსაზრისით მისი მარეგულირებელი თვისებების გამო. ის სათავეს იღებს იოსიდას [29] მონოგრაფიიდან მაქსიმალური მონოტონური ოპერატორების შესახებ და მისი ყოფაქცევა კარგადაა ცნობილი ამოზნექილ ანალიზსა (როკფელერი [9]) და ვარიაციულ ანალიზში (როკფელერი, ვეტსი [10]).

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ აღნიშნულ გარდაქმნებს შორის არსებობს შემდეგი მარტივი თანაფარდობები

$$M_\lambda f(x) = \frac{|x|^2}{2\cdot\lambda} - \frac{1}{\lambda}\cdot\Big(\frac{|y|^2}{2} + \lambda\cdot f(y)\Big)^*(x), \tag{4.1.3}$$

$$f^*(x) = \frac{|x|^2}{2} - \lambda\cdot M_\lambda\Big(\frac{1}{\lambda}\cdot f(y) - \frac{|y|^2}{2\cdot\lambda}\Big)(x), \tag{4.1.4}$$

სადაც $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, არის ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქცია და $\lambda > 0$.

(4.1.1) განსაზღვრიდან და (4.1.3) თანაფრდობიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი ფაქტი, რომ ნებისმიერი მრავალი ცვლადის $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, ფუნქციისათვის მისი ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნა ამოზნექილი ფუნქციაა, ხოლო მოროს მომვლები წარმოადგენს ნახევრად ჩაზნექილ ფუნქციას ნახევრადჩაზნექილობის $\frac{1}{\lambda}$ მუდმივით. (4.1.3) და (4.1.4) თანაფარდობებიდან ვასკვნით, რომ მოროს მომვლების გამოთვლა ექვივალენტურია ლეჟანდრ–ფენხელის შეუღლებულის გამოთვლისა; ამრიგად, ერთი გარდაქმნის გამოსათვლელი ალგორითმი მარტივად დაიყვანება მეორე გარდაქმნის გამოსათვლელ ალგორითმზე.

ამოზნექილი ანალიზის ჩვენთვის საინტერესო მესამე ფუნდამენტალური გარდაქმნა არის მოცემული $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები. შეგახსენებთ, რომ მრავალი ცვლადის ნამდვილმნიშვნელობებიანი უწყვეტი $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები $\Gamma f(x)$ წარმოადგენს მაქსიმალურ ამოზნექილ ფუნქციას, რომელიც მაჟორირდება $f(x)$ ფუნქციით (იხ. როკფელერი [9, პარაგრაფი 5]).

შესანიშნავი ფაქტია, რომ მნიშვნელოვანი თანაფარდობა არსებობს მოცემული $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, ფუნქციის ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნასა და ამოზნექილ მომვლებს შორის, კერძოდ,

$$\Gamma(f) = (f^*)^* = f^{**}, \tag{4.1.5}$$

ანუ უწყვეტი $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, ფუნქციის ამოზნექილი მომვლები წარმოადგენს ამ ფუნქციის ლეჟანდრ–ფენხელის მეორე შეუღლებულს (როკფელერი, ვეტსი [10, თავი 11]).

გამოთვლითი ამოზნექილი ანალიზი ფოკუსირდება ამოზნექილი ანალიზის ფუნდამენტალური გარდაქმნების რიცხვით გამოთვლაზე. ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნის რიცხვითი გამოთვლისთვის ბადის წერტილებზე განვითარებულ იქნა სპეციალური ალგორითმები და ისინი გამოყენებული იქნა ჰამილტონ–იაკობის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნისთვის. სწრაფი

ლეჟანდრის გარდაქმნა (FLT) განვითარებული იქნა ბრენიერის [11] და ლუცეტის [12] მიერ. ამის მსგავსად მოროს მომვლების გამოსათვლელად განვითარებულ იქნა სწრაფი ალგორითმი დენიოს [30] მიერ. ამოზნექილი მომვლების გამოთვლისთვის ბადის წერტილებზე სწრაფი ალგორითმი შემუშავებული იქნა ბარბერის, დობკინისა და ჰუჰდანჰას [13] მიერ და ეწოდება ``The Quickhull Algorithm for Convex Hulls''. კარგადაა ცნობილი, რომ $\mathbb{R}^n$-ში წერტილთა სასრული სიმრავლის ამოზნექილი გარსი განისაზღვრება, როგორც უმცირესი ამოზნექილი სიმრავლე, რომელიც მოიცავს ამ წერტილებს. ამოზნექილი გარსის გამოთვლა წარმოადგენს კომპიუტერული გეომეტრიის ფუნდამენტალურ ამოცანას. აღნიშნული ალგორითმი (QHULL) მუშაობს $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ნებისმიერი განზომილებისთვის და განსაკუთრებით სწრაფია, როცა $n \leq 4$.

4.2 ჰამილტონ–იაკობის განტოლებები და სკალარული შენახვის კანონები. მონჟ–ამპერის განტოლება

ამ პარაგრაფს ვიწყებთ საწყისი პირობის მქონე ჰამილტონ–იაკობის განტოლების განხილვით

$$\begin{cases} u_t + H(\operatorname{grad} u) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\text{-ში}, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

სადაც $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ჰამილტონიანი და $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ საწყისი ფუნქცია მოცემულია და ვეძებთ უცნობ $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ფუნქციას, ამასთან

$$\operatorname{grad} u(x,t) = \Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_n}\Big)$$

წარმოადგენს x სივრცითი არგუმენტით $u(x,t)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებისგან შემდგარ ვექტორს.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ლიფშიცის აზრით უწყვეტი ფუნქციაა, ანუ არსებობს არაუარყოფითი $c \geq 0$ მუდმივი ისეთი, რომ

$$\big|g(x) - g(y)\big| \leq c \cdot |x - y|, \ \ x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.2}$$

რაც შეეხება ჰამილტონიანზე მოთხოვნებს, ვიგულისხმებთ, რომ

$$\begin{cases} H \text{ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია}, \\ H \text{ ამოზნექილია და } \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{H(x)}{|x|} = +\infty. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

განსაზღვრება 4.2.1. $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ორჯერ უწყვეტად წარმოებად (C^2 კლასის) ფუნქციას ეწოდება თანაბრად ამოზნექილი $\gamma > 0$ მუდმივით, თუ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot y_i \cdot y_j \geq \gamma \cdot |y|^2 \ \text{ ყოველი } x, y \in \mathbb{R}^n\text{-თვის}. \tag{4.2.4}$$

განსაზღვრება 4.2.2. ვიტყვით, რომ $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ წარმოადგენს ნახევრადჩაზნექილ ფუნქციას ნახევრადჩაზნექილობის $c \geq 0$ მუდმივით, თუ ყოველი $x, z \in \mathbb{R}^n$-თვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$f(x+z) - 2 \cdot f(x) + f(x-z) \leq c \cdot |z|^2. \tag{4.2.5}$$

განსაზღვრება 4.2.3. განვიხილოთ შემდეგი ინფიმალური-კონვოლუცია

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ g(y) + t \cdot H^*\Big(\frac{x-y}{t}\Big) \Big\}, \tag{4.2.6}$$

სადაც $t > 0$ და $x \in \mathbb{R}^n$. ვუწოდოთ მას ჰოფ–ლაქსის ფორმულა (სადაც $H^*(x)$ წარმოადგენს $H(x)$ ჰამილტონიანის ლეჟანდრ–ფენხელის შეუღლებულ ფუნქციას).

შემდეგი ლემა გვიჩვენებს, რომ $u(x,t)$ ფუნქცია ინახავს ნახევრადჩაზნექილობის თვისებას ნებისმიერი დროითი $t > 0$ მომენტისთვის საწყისი $g(x)$ ფუნქციისგან.

ლ ე მ ა 4.2.1 (ევანსი [6, ლემა 3, პარაგრაფი 3.3]). *დავუშვათ, რომ $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, წარმოადგენს ნახევრადჩაზნექილ ფუნქციას ნახევრადჩაზნექილობის $c \geq 0$ მუდმივით, მაშინ ყოველი დროის $t \geq 0$ მომენტისთვის (4.2.6)-ით განსაზღვრული $u(x,t)$ ფუნქცია აგრეთვე ნახევრადჩაზნექილი ფუნქციაა იმავე $c \geq 0$ მუდმივით.*

თუ ჰამილტონიანისგან მოვითხოვთ თანაბრად ამოზნექილობის (4.2.4) პირობას, მაშინ ჩვენდა გასაოცრად აღმოჩნდება, რომ ჰოფ–ლაქსის (4.2.6) ფუნქცია არის ნახევრადჩაზნექილი $t > 0$ დროითი მომენტებისთვის მაშინაც კი, როცა საწყისი $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ფუნქცია არ არის ნახევრადჩაზნექილი. მართლაც, სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლ ე მ ა 4.2.2 (ევანსი [6, ლემა 4, პარაგრაფი 3.3]). *დავუშვათ, რომ $H(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, თანაბრად ამოზნექილია $\gamma > 0$ მუდმივით და $u(x,t)$ განისაზღვრება ჰოფ–ლაქსის (4.2.6) ფორმულით. მაშინ ყოველი $t > 0$-თვის $u(x,t)$ ნახევრად ჩაზნექილი ფუნქციაა ნახევრადჩაზნექილობის $c = \frac{1}{\gamma \cdot t}$ მუდმივით, ანუ*

$$u(x+z,t) - 2 \cdot u(x,t) + u(x-z,t) \leq \frac{1}{\gamma \cdot t} \cdot |z|^2 \ \textit{ყველა } x, z \in \mathbb{R}^n\textit{-თვის}. \tag{4.2.7}$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.2.4. ვიტყვით, რომ $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ლიფშიცის აზრით უწყვეტი ფუნქცია, არის (4.2.1) ამოცანის სუსტი ამონახსნი, თუ სრულდება

(a) $u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $u_t(x,t) + H\big(\operatorname{grad} u(x,t)\big) = 0$, თ. ყ. $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, (4.2.8)

(c) არსებობს $c \geq 0$ მუდმივი ისეთი, რომ ყოველი $t > 0$, $x, z \in \mathbb{R}^n$-თვის, ადგილი აქვს უტოლობას

$$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq c\Big(1 + \frac{1}{t}\Big) \cdot |z|^2. \tag{4.2.9}$$

თ ე ო რ ე მ ა 4.2.1 (ევანსი [6, თეორემა 8, პარაგრაფი 3.3]). *დავუშვათ, რომ $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ჰამილტონიანი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია და აკმაყოფილებს (4.2.3) პირობას, ხოლო საწყისი $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია ლიფშიცის აზრით უწყვეტია (ანუ აკმაყოფილებს (4.2.2)). თუ $g(x)$ ნახევრადჩაზნექილია, ანდა $H(x)$ თანაბრად ამოზნექილია, მაშინ*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ g(y) + t \cdot H^*\Big(\frac{x-y}{t}\Big) \Big\} \tag{4.2.10}$$

ფუნქცია წარმოადგენს ერთადერთ სუსტ ამონახსნს ჰამილტონ–იაკობის (4.2.1) განტოლებისთვის.

ახლა გადავდივართ საწყისი პირობის მქონე სკალარული შენახვის კანონებზე ერთგანზომილებიან შემთხვევაში

$$\begin{cases} u_t + \big(H(u)\big)_x = 0 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ში}, \\ u(x,0) = g(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2.11}$$

სადაც მოცემულია $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ჰამილტონიანი და $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ საწყისი ფუნქცია, საძიებელია $u:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ფუნქცია.

(4.2.11) განტოლებაში $(H(u))_x$ ნიშნავს $H(u(x,t))$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x-ის მიმართ. (4.2.11) განტოლება წარმოადგენს სკალარული შენახვის კანონის სათანადო განტოლებას და ჩვენი ინტერესი მის მიმართ განპირობებულია სკალარული შენახვის კანონებსა და ჰამილტონ–იაკობის განტოლებებს შორის კარგად ცნობილი კავშირით ერთგანზომილებიან შემთხვევაში. მართლაც, თუ $u(x,t)$ ფუნქცია წარმოადგენს (4.2.11) ამოცანის ენტროპიულ ამონახსნს (რომელიც ქვემოთ განისაზღვრება), მაშინ

$$v(x,t) = \int_0^x u(y,t)\,dy \tag{4.2.12}$$

ფუნქცია იქნება ჰამილტონ–იაკობის

$$\begin{cases} v_t + H(v_x) = 0 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ში}, \\ v(x,0) = h(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2.13}$$

განტოლების სუსტი ამონახსნი, სადაც

$$h(x) = \int_0^x g(y)\,dy. \tag{4.2.14}$$

მაშასადამე, (4.2.11) სკალარული შენახვის კანონის განტოლების ამონახსნი $u(x,t)$ შესაძლოა მივიღოთ ჰამილტონ–იაკობის (4.2.13) განტოლების $v(x,t)$ ამონახსნისგან შემდეგი სახით

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\, v(x,t), \quad t>0. \tag{4.2.15}$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.2.10) ფორმულას თეორემა 4.2.1-ში უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ჩაწერილი იქნეს შემდეგი სახით

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\min_{y\in\mathbb{R}}\Big\{h(y) + t\cdot H^*\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big\}. \tag{4.2.16}$$

განვსაზღვროთ (4.2.11) საწყისი პირობის მქონე სკალარული შენახვის კანონის ენტროპიული ამონახსნი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.2.5. ვიტყვით, რომ $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ ფუნქცია წარმოადგენს (4.2.11) ამოცანის ენტროპიულ ამონახსნს, თუ ყოველი $v : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ტესტური ფუნქციისთვის კომპაქტური მზიდით, სრულდება შემდეგი თანაფარდობა

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(u \cdot v_t + H(u) \cdot v_x\big)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty (g \cdot v)\, dx \bigg|_{t=0} = 0 \tag{4.2.17}$$

და, თუ არსებობს $c \geq 0$ მუდმივი ისეთი, რომ

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leq c\Big(1 + \frac{1}{t}\Big) \cdot z \tag{4.2.18}$$

თ. ყ. $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $z > 0$.

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს კლასიკურ შედეგს, რომელიც ასაბუთებს ენტროპიული ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2.2 (ევანსი [6, ლაქს–ოლეინიკის ფორმულა, თეორემები 1–3, პარაგრაფი 3.4])**.** *დავუშვათ, რომ $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ჰამილტონიანი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია, არის თანაბრად ამოზნექილი ($H''(x) \geq \beta > 0$) და $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. მაშინ ყოველი $t > 0$-თვის*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \min_{y\in\mathbb{R}} \Big\{h(y) + t \cdot H^*\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big\} \tag{4.2.19}$$

ფუნქცია განსაზღვრულია თითქმის ყველა x-თვის. $u(x,t)$ ფუნქცია წარმოადგენს (4.2.11) სკალარული შენახვის კანონის ერთადერთ ენტროპიულ ამონახსნს.

განვიხილოთ კვადრატული ჰამილტონიანის შემთხვევა:

$$H(x) = \frac{1}{2} \cdot |x|^2, \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.20}$$

კარგად არის ცნობილი და ადვილად შესამოწმებელია, რომ

$$H^*(x) = H(x) = \frac{1}{2} \cdot |x|^2, \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.21}$$

ამ კერძო შემთხვევაში (4.2.6) ჰოფ–ლაქსის ფორმულა იგივეა რაც მოროს მომვლები

$$M_t g(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \Big(g(y) + \frac{|x-y|^2}{2 \cdot t}\Big), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2.22}$$

შეგახსენებთ, რომ (4.1.3) თანაფარდობიდან მოროს მომვლები შეიძლება ჩაწერილ იქნას ლეჟანდრ–ფენხელის შეუღლებულის მეშვეობით, საიდანაც ვღებულობთ

$$M_t g(x) = \frac{|x|^2}{2 \cdot t} - \frac{1}{t} \cdot \Big(\frac{|y|^2}{2} + t \cdot g(y)\Big)^*(x), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

აქედან კი გვექნება

$$u(x,t) = \frac{|x|^2}{2 \cdot t} - \frac{1}{t} \cdot \Big(\frac{|y|^2}{2} + t \cdot g(y)\Big)^*(x), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2.23}$$

სადაც $u(x,t)$ წარმოადგენს კვადრატული ჰამილტონიანის მქონე, ჰამილტონ–იაკობის

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2} \cdot |\operatorname{grad} u|^2 = 0 & \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\text{-ში}, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.2.24}$$

განტოლების სუსტ ამონახსნს.

ვინაიდან ნებისმიერი ფუნქციის ლეჟანდრ–ფენხელის გარდაქმნა წარმოადგენს ამოზნექილ ფუნქციას, (4.2.23) თანაფარდობიდან ვასკვნით, რომ $u(x,t)$ ფუნქცია ნახევრადჩაზნექილია ნებისმიერი $t>0$-თვის, მაშინაც კი, როცა საწყისი $g(x)$ ფუნქცია ასეთი არ არის.

ახლა განვიხილავთ სკალარული შენახვის კანონების კერძო შემთხვევას, ე. წ. ბურგერსის განტოლებას

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty)\text{-ში}, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.2.25}$$

ეს განტოლება შეესაბამება $H(x) = \frac{1}{2}\,x^2$, $x \in \mathbb{R}$, კვადრატული ჰამილტონიანის შემთხვევას. ამ შემთხვევისთვის თეორემა 4.2.2-ის (ლაქს–ოლეინიკის ფორმულა) გამოყენებით, (4.2.25) ამოცანის ერთადერთი ენტროპიული ამონახსნი მოიცემა

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} \min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ h(y) + \frac{1}{t} \cdot \frac{|x-y|^2}{2} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x^2}{2\cdot t} - \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{|y|^2}{2} + t \cdot h(y) \right)^*(x) \right\} = \\ &= \frac{x}{t} - \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} + t \cdot h(y) \right)^*(x) \end{aligned}$$

ფორმულით.

ამგვარად, $g(x)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, საწყისი პირობის მქონე (4.2.25) ბურგერსის განტოლების ამონახსნი მოიცემა შემდეგნაირად

$$u(x,t) = \frac{x}{t} - \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} + t \cdot h(y) \right)^*(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2.26}$$

სადაც

$$h(y) = \int_0^y g(z)\,dz. \tag{4.2.27}$$

განვიხილოთ მონჟ–ამპერის განტოლება. ის წარმოადგენს სავსებით არაწრფივ ელიფსურ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას. მონჟ–ამპერის განტოლების გამოყენებები გვხვდება წინასწარ მოცემული გაუსის სიმრუდის მქონე ზედაპირის მოძებნის კლასიკურ ამოცანაში და ასევე მასების ოპტიმალური ტრანსპორტირების ამოცანაში.

მონჟ–ამპერის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისთვის ორგანზომილებიან შემთხვევაში გამოვიყენებთ სასრულ-სხვაობიან მეთოდს (ცხრა წერტილიანი სქემით), რომელიც მოცემულია ნაშრომში (ბენამო, ფროზი და ობერმანი [15]). ეს მეთოდი კარგად მუშაობს როგორც გლუვი, ასევე სინგულარული ამონახსნებისთვის. ბრტყელი $D \subset \mathbb{R}^2$ არის შემთხვევაში მონჟ–ამპერის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება შემდეგნაირად იწერება

$$\det\big(\mathrm{Hess}\, u(x)\big) = f(x), \quad f(x) \geq 0, \tag{4.2.28}$$

ანდა ექვივალენტური სახით

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 = f \quad D \subset \mathbb{R}^2\text{-ში}, \\ \text{დირიხლეს სასაზღვრო პირობით} \;\; u = g \quad \partial D\text{-ზე} \end{cases} \tag{4.2.29}$$

და დამატებითი ამოზნექილობის მოთხოვნით

$$u(x, y) \;\; \text{ამოზნექილია } D\text{-ში}, \tag{4.2.30}$$

რომელიც მოითხოვება ამ განტოლების ელიფსურობისთვის. ამოზნექილობის დამატებითი მოთხოვნის გარეშე, მონჟ–ამპერის განტოლებას არ აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მართლაც, თუ სასაზღვრო ფუნქციის როლში ავიღებთ $g(x) = 0$ და $u(x)$ მისი ამონახსნია, მაშინ $-u(x)$ აგრეთვე იქნება მისი ამონახსნი.

მოვახდინოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულების შეცვლა შესაბამისი ცენტრალური სხვაობებით თანაბარი ბადის წერტილებისთვის, შედეგად გვექნება

$$(D^2_{xx} u_{ij}) \cdot (D^2_{yy} u_{ij}) - (D^2_{xy} u_{ij})^2 = f_{ij}, \tag{4.2.31}$$

სადაც

$$\begin{cases} D^2_{xx} u_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{ij}}{h^2}, \\ D^2_{yy} u_{ij} = \dfrac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{ij}}{h^2}, \\ D^2_{xy} u_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4h^2}. \end{cases} \tag{4.2.32}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2} \quad a_2 = \dfrac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2}, \\ a_3 = \dfrac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{2} \quad a_4 = \dfrac{u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}}{2} \end{cases} \tag{4.2.33}$$

და (4.2.31) გადავწეროთ როგორც კვადრატული განტოლება u_{ij}-ის მიმართ

$$4(a_1 - u_{ij})(a_2 - u_{ij}) - \frac{1}{4}(a_3 - a_4)^2 = h^4 f_{ij}. \tag{4.2.34}$$

ამოვხსნათ u_{ij} (4.2.34) განტოლებიდან და შევარჩიოთ უმცირესი ფესვი, გვექნება

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2) - \frac{1}{2}\,\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + \frac{1}{4}(a_3 - a_4)^2 + h^4 f_{ij}}\,. \qquad (4.2.35)$$

აღნიშნული ცხრა წერტილიანი სქემის ამოხსნას ვახდენთ გაუს–ზეიდელის მეთოდით, იტერაციულ პროცესთან კომბინაციით, ვითვალისწინებთ რა საზღვრის წერტილებში დირიხლეს სასაზღვრო პირობას. შევნიშნოთ, რომ გამოთვლების დასაჩქარებლად ვიყენებთ სწრაფ ალგორითმს (იხ. როგავა [31]).

აღნიშნული აპროქსიმაციის მიღების შემდეგ მოვახდინეთ დისკრეტული ამოზნექილი მომვლების აგება კომპიუტერულ გეომეტრიაში კარგად ცნობილი ალგორითმის ``QHULL''-ის მეშვეობით, რომელიც $n$-განზომილებიანი სივრცის წერტილთა ნებისმიერი სასრული სიმრავლისთვის აგებს მის ამოზნექილ გარსს ანუ მინიმალურ ამოზნექილ სიმრავლეს, რომელიც მოიცავს აღნიშნულ წერტილებს, ხოლო შესაბამისი დისკრეტული ამოზნექილი მომვლები მიიღება, როგორც ამოზნექილი გარსის ``ქვედა საზღვარი''.

ჩვენ მოვახდინეთ შესაბამისი ალგორითმების რეალიზაცია მონჟ–ამპერის, ჰამილტონ–იაკობის და ბურგერსის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისთვის და მოვიყვანეთ კონკრეტული სატესტო მაგალითები. აღნიშნული მაგალითებისთვის ვაჩვენეთ, რომ თეორიული მიდგომა იძლევა კარგი სიზუსტის მიახლოებას პრაქტიკული ამოცანებისთვის, რაც წარმოადგენს თეორიული მეთოდის პრაქტიკულ დასაბუთებას.

4.3 მაგალითები

როგორც ზემოთ იქნა აღნიშნული ჩვენ ვიხილავთ სამი სახის არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას და ვახდენთ მათი ამონახსნების კომპიუტერულ რიცხვით რეალიზაციას.

1. კვადრატული ჰამილტონიანის მქონე ჰამილტონ–იაკობის განტოლება:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} + \dfrac{1}{2}\,|grad(u)|^2 = 0, \quad (x,t) \in R^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x); \end{cases}$$

2. სკალარული შენახვის კანონების კერძო შემთხვევა ე. წ. ბურგერსის განტოლება:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} + \left(\dfrac{1}{2}\,u^2\right)_x = 0, \quad (x,t) \in R \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x); \end{cases}$$

3. მონჟ–ამპერის განტოლება ბრტყელი D არის შემთხვევაში:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{dx^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{dy^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{dx\,dy}\right)^2 = f, \quad D \subset R^2, \\ \text{დირიხლეს სასაზღვრო პირობით } u = g \quad \partial D\text{-ზე} \end{cases}$$

და მოთხოვნით $u(x,y)$ ამოზნექილია D არეში.

ჰამილტონ–იაკობის განტოლება

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} + \dfrac{1}{2}\,|grad(u)|^2 = 0, \quad (x,t) \in R^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

ერთგანზომილებიანი შემთხვევა

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.1.

$$g(x) = |x|.$$

ზუსტი ამონახსნი

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x,t) = |x| - \dfrac{t}{2}\,, & \text{როცა } |x| \geq t \\ u(x,t) = \dfrac{|x|^2}{2t}\,, & \text{როცა } |x| \leq t \end{array} \right\}$$

მიახლოებით ამონახსნს ვაგებთ $t = 10$-თვის, $x \in (-100, 100)$.

შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	სუპრემუმის საძებნი არე	აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქიმაციის წონიანი საშუალო კვადრატული ნორმა
2000001	$(-200, 200)$	2×10^{-13}	5×10^{-6}	0.0041

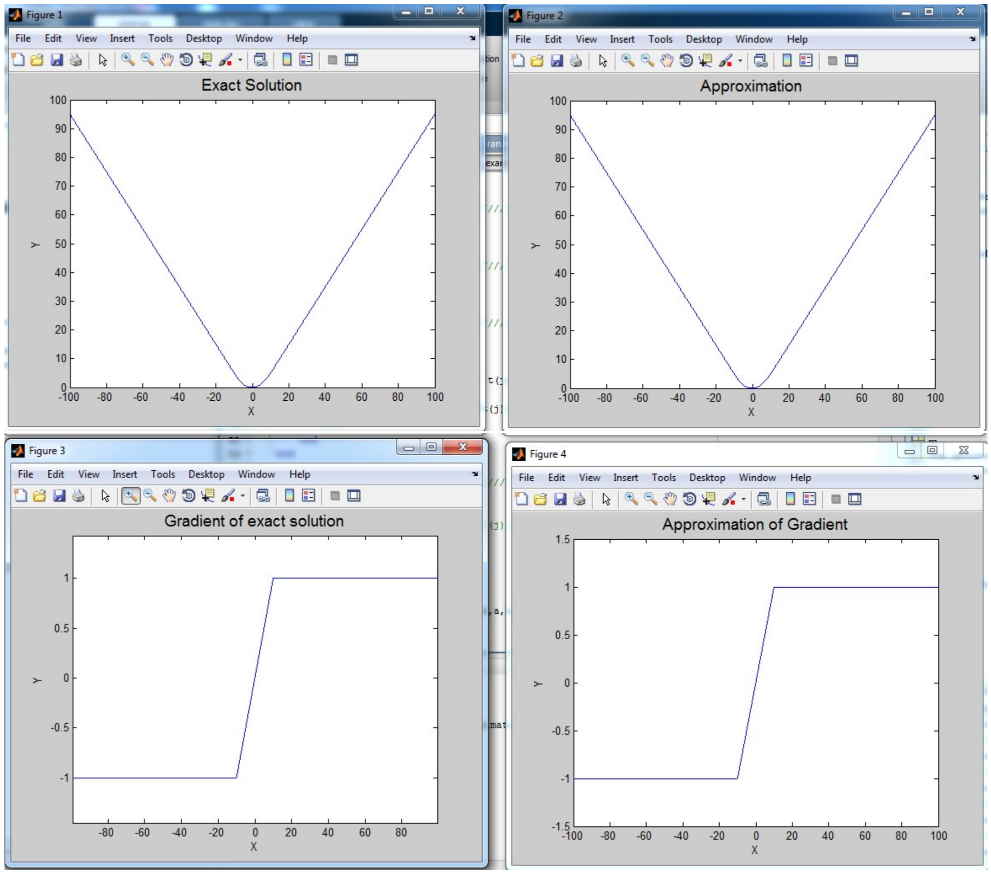


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Exact Solution
Y
X
Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Approximation
Y
X
Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Gradient of exact solution
Y
X
Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Approximation of Gradient
Y
X

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.2.

$$g(x) = -|x|.$$

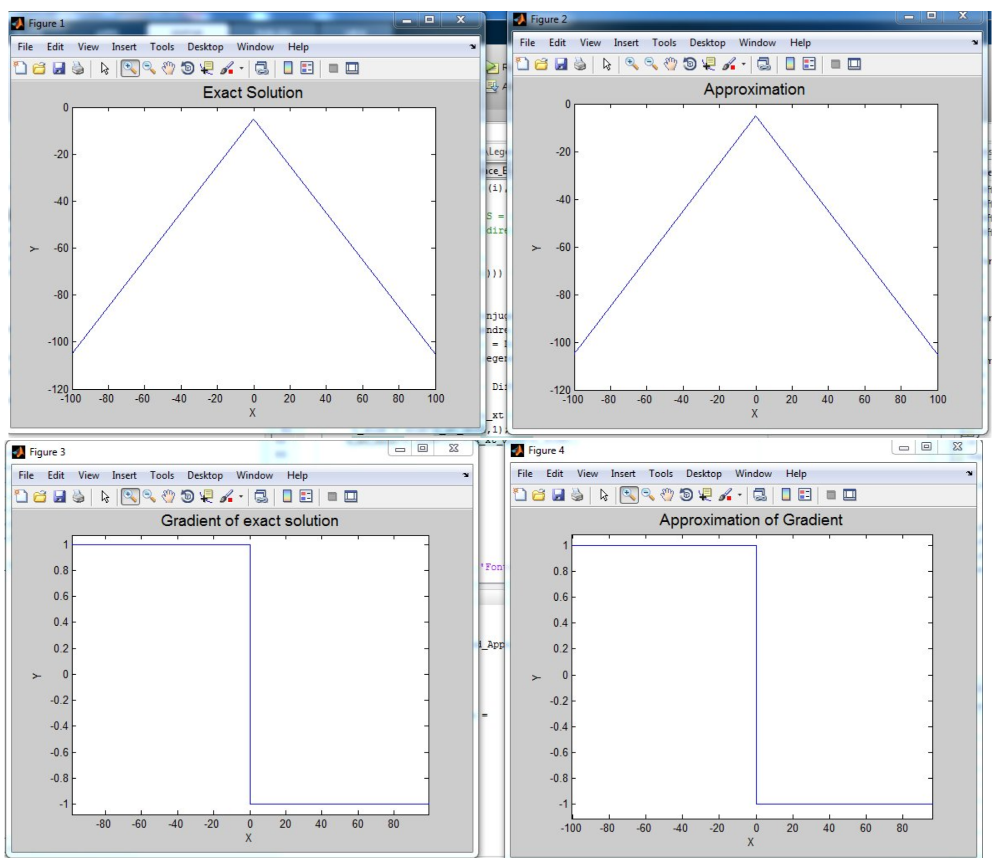
ზუსტი ამონახსნი

$$u(x,t) = -|x| - \frac{t}{2}.$$

მიახლოებით ამონახსნს ვაგებთ $t = 10$-თვის, $x \in (-100, 100)$.

შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	სუპრემუმის საძებნი არე	აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქიმაციის წონიანი საშუალო კვადრატული ნორმა
2000001	$(-200, 200)$	3×10^{-13}	5×10^{-6}	0.0041



ორგანზომილებიანი შემთხვევა

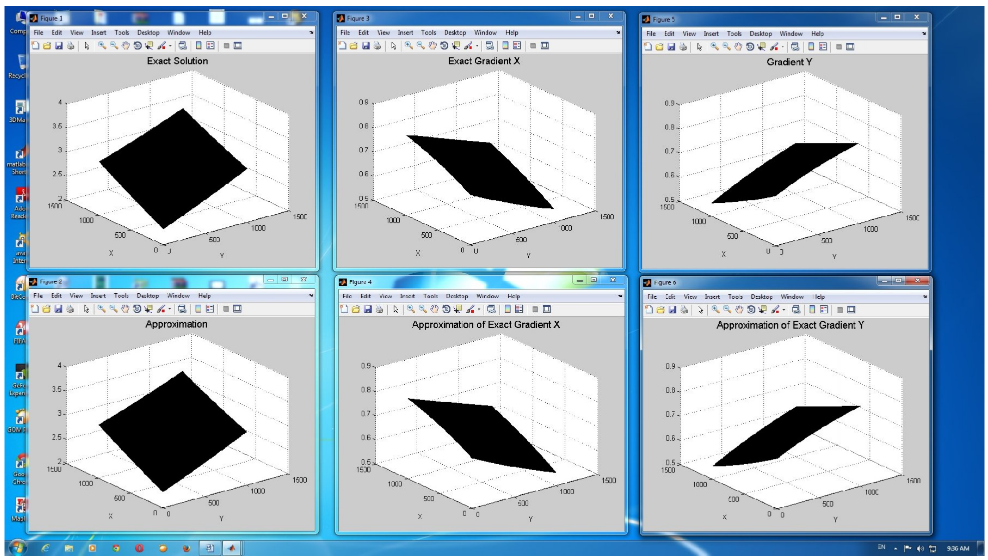
მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.3.

$$g(x) = |x|.$$

მიახლოებით ამონახსნს ვაგებთ $t = 1$-თვის, $x \in (2,3) \times (2,3)$.

შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	აპროქსიმაციის თანაბარი	გრადიენტის აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქიმაციის წონიანი საშუალო კვადრატული ნორმა
1000×1000	3×10^{-7}	4×10^{-4}	0.0012



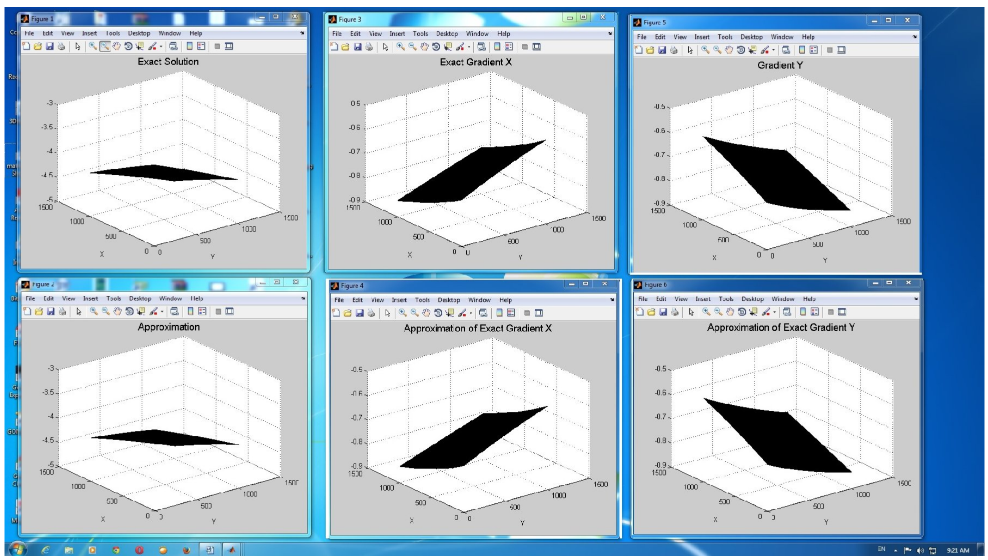
მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.4.

$$g(x) = -|x|.$$

მიახლოებით ამონახსნს ვაგებთ $t = 1$-თვის, $x \in (2,3) \times (2,3)$.

შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	აპროქსიმაციის თანაბარი	გრადიენტის აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქიმაციის წონიანი საშუალო კვადრატული ნორმა
1000×1000	2×10^{-7}	4×10^{-4}	0.0011



ბურგერსის განტოლება

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} + \left(\dfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad (x,t) \in R \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.5.

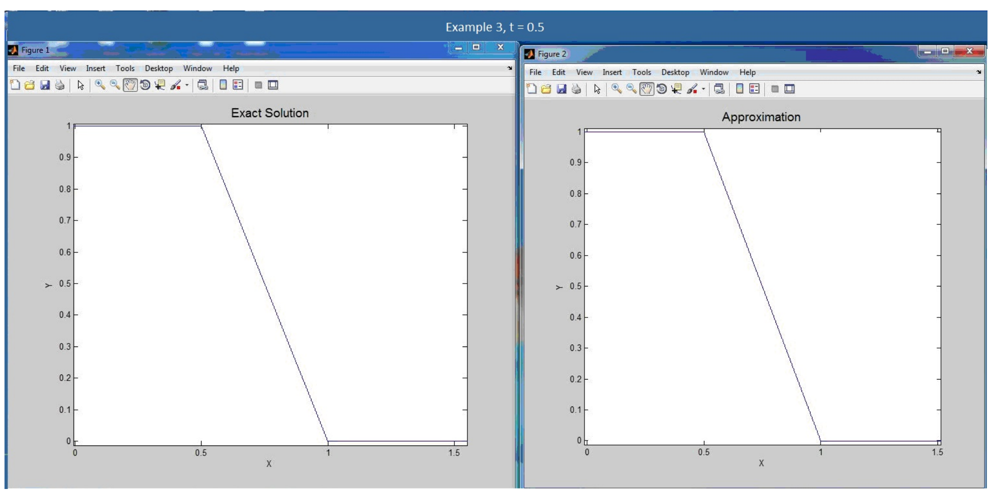
$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x \ge 0 \end{array} \right\}$$

მიახლოებით ამონახსნს ვაგებთ $t = 0.5$-სა და $t = 1$-თვის, $x \in (-100, 100)$.

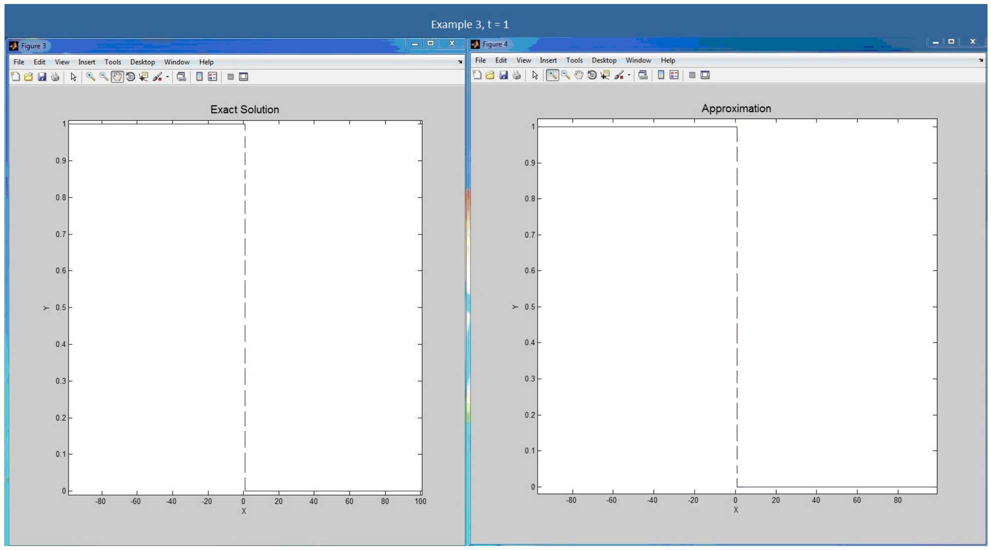
შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	სუპრემუმის საძებნი არე	t	L^2 საშუალო კვადრატული ნორმა
2000001	$(-200, 200)$	0.5	0.0007
2000001	$(-200, 200)$	1	0.0007

$t = 0.5$



$$t = 1$$



Example 3, t = 1
Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Exact Solution
Y
X
Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Approximation
Y
X

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.6.

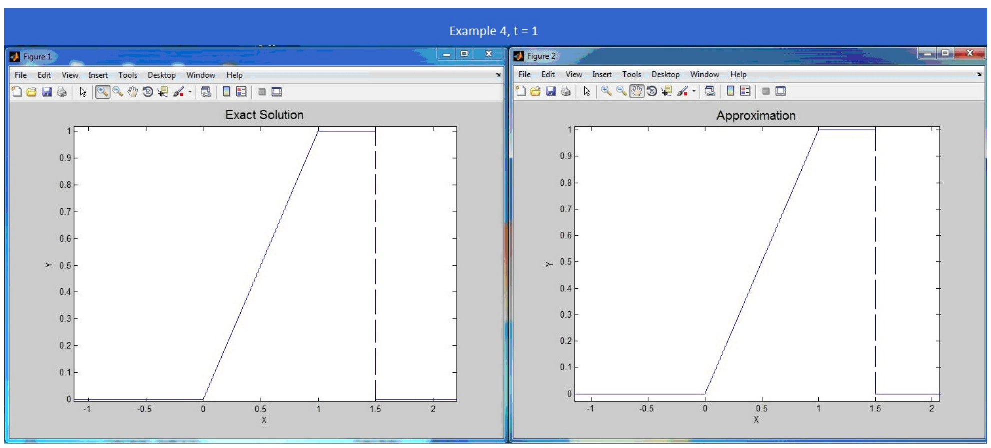
$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 0 \end{array} \right\}$$

მიახლოებით ამონახსნს ვაგებთ $t = 1$-სა და $t = 2$-თვის, $x \in (-100, 100)$.

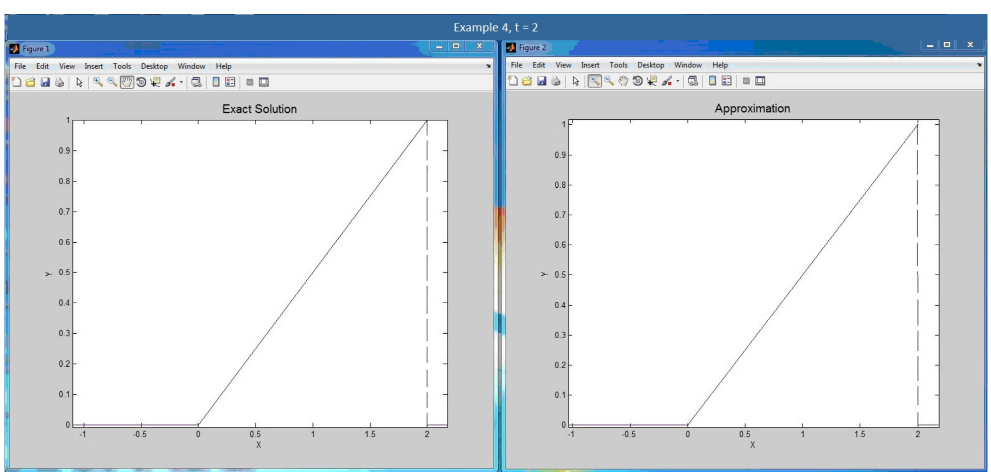
შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	სუპრემუმის საძებნი არე	t	L^2 საშუალო კვადრატული ნორმა
2000001	$(-200, 200)$	1	0.0007
2000001	$(-200, 200)$	2	0.0003

$t = 1$

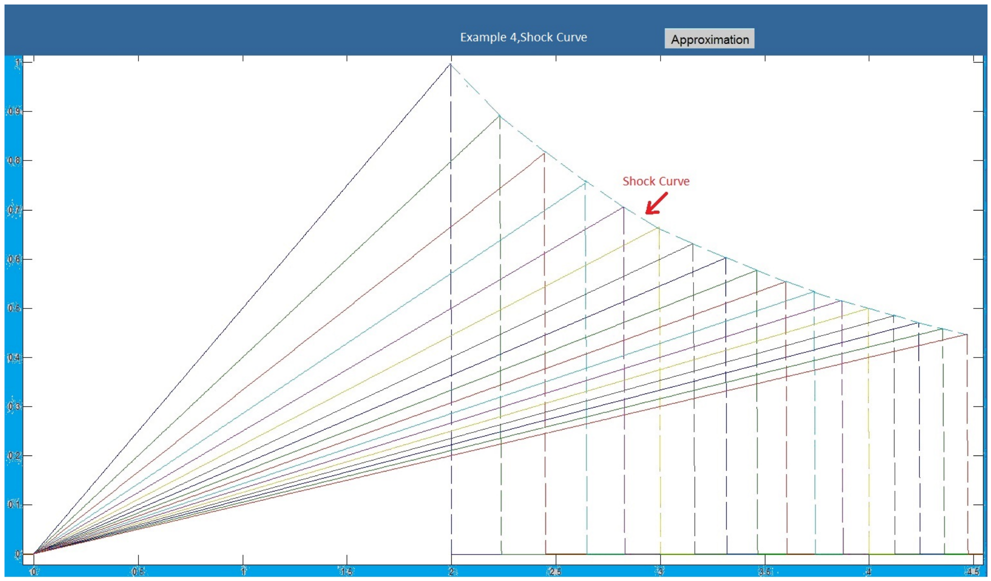


$t = 2$



ქვემოთ მოყვანილ სურათზე ვაგებთ $u(x,t)$-ს მიახლოებით ამონახსნს დროის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:

$$t = 2, 2.5, 3, 3.5, 4, \ldots, 10.$$



მონჟ–ამპერის განტოლება

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{dx^2}\dfrac{\partial^2 u}{dy^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{dx\,dy}\right)^2 = f, \quad D \subset R^2, \\ u = g \quad \partial D\text{-ზე}, \; D = [0,1]\times[0,1], \end{cases}$$

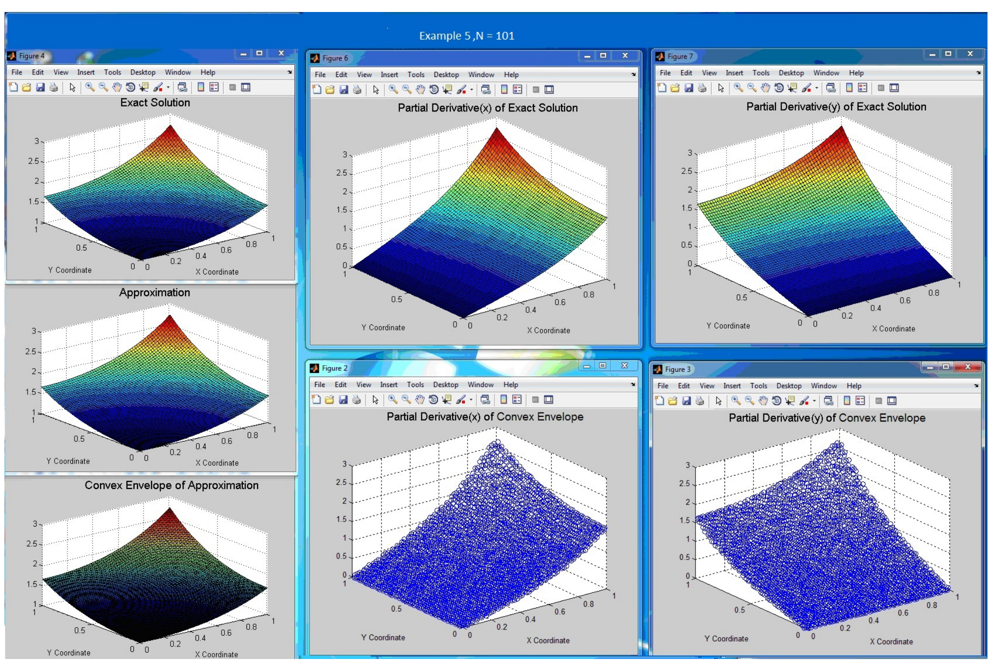
$u(x,y)$ ამოზნექილია D არეში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.7.

$$u(x,y) = \exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right), \quad f(x,y) = (1+x^2+y^2)\cdot\exp(x^2+y^2).$$

შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	იტერაციების რაოდენობა	გამოთვლის დრო	აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქსიმაციის წონიანი საშუალო კვადრატული ნორმა
21×21	1362	1 წმ	1.5×10^{-4}	0.1255	0.011
61×61	10840	10 წმ	1.8×10^{-5}	0.0441	0.0038
101×101	28764	1 წთ	6.7×10^{-6}	0.0267	0.0023
141×141	54802	5 წთ	3.4×10^{-6}	0.0192	0.0016

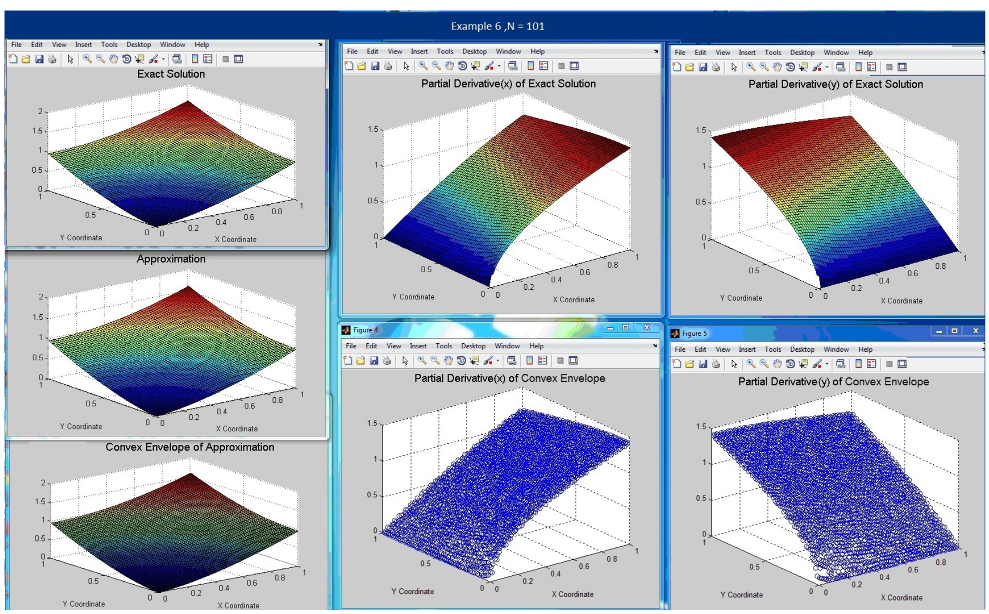


მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.3.8.

$$u(x,y)=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\cdot(x^2+y^2)^{3/4},\quad f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

შ ე დ ე გ ე ბ ი :

დაყოფათა რაოდენობა	იტერაციების რაოდენობა	გამოთვლის დრო	აპროქსიმაციის თანაბარი ნორმა	გრადიენტის აპროქსიმაციის თანაბარი	გრადიენტის აპროქსიმაციის წონიანი საშუალო
				ნორმა	კვადრატული ნორმა
21×21	1397	1 წმ	5×10^{-4}	0.1511	0.0077
61×61	11065	10 წმ	1×10^{-4}	0.0887	0.0027
101×101	29312	1 წთ და 10 წმ	4.9×10^{-5}	0.0689	0.0016
141×141	55768	5 წთ	2.9×10^{-5}	0.0583	0.0011



ლიტერატურა

[1] H. Ishii and P.-L. Lions, Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *J. Differential Equations* **83** (1990), no. 1, 26–78.

[2] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.-H. Sato, Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains. *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), no. 2, 443–470.

[3] N. V. Krylov, Controlled diffusion processes. Applications of Mathematics, 14. *Springer-Verlag, New York–Berlin*, 1980.

[4] P.-L. Lions, Control of diffusion processes in $\mathbb{R}^n$. *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), no. 1, 121–147.

[5] P. Cannarsa and C. Sinestrari, Semiconcave functions, Hamilton–Jacobi equations, and optimal control. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. *Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA*, 2004.

[6] L. C. Evans, Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 19. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1998.

[7] K. Shashiashvili and M. Shashiashvili, Estimation of the derivative of the convex function by means of its uniform approximation. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.* **6** (2005), no. 4, Article 113, 10 pp. (electronic).

[8] K. Shashiashvili and M. Shashiashvili, From the uniform approximation of a solution of the PDE to the L^2-approximation of the gradient of the solution. *J. Convex Anal.* **21** (2014), no. 1, 237–252.

[9] R. T. Rockafellar, Convex Analysis. Princeton Mathematical Series, No. 28, *Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1970.

[10] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, Variational Analysis. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 317, *Springer-Verlag, Berlin*, 1998.

[11] Y. Brenier, Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre–Fenchel discrètes. (French) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), no. 20, 587–589.

[12] Y. Lucet, Faster than the fast Legendre transform, the linear-time Legendre transform. *Numer. Algorithms* **16** (1997), no. 2, 171–185 (1998).

[13] C. B. Barber, D. P. Dobkin, and H. Huhdanpaa, The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Trans. Math. Software* **22** (1996), no. 4, 469–483.

[14] J. Rogava, K. Shashiashvili, and M. Shashiashvili, Computational convex analysis and its applications to numerical solution of some nonlinear partial differential equations. *AMIM, Appl. Math. Inform. Mech.* **19** (2014), 62–82.

[15] J.-D. Benamou, B. D. Froese, and A. M. Oberman, Two numerical methods for the elliptic Monge–Ampère equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **44** (2010), no. 4, 737–758.

[16] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics. *CRC Press, Boca Raton, FL*, 1992.

[17] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224. *Springer-Verlag, Berlin–New York*, 1977.

[18] M. Shoaib Saleem, K. Shashiashvili, and M. Shashiashvili, The weighted reverse Poincare type inequality for the difference of two parabolic subsolutions. *Math. Slovaca* **66** (2016) (accepted).

[19] O. Alvarez, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions, Convex viscosity solutions and state constraints. *J. Math. Pures Appl. (9)* **76** (1997), no. 3, 265–288.

[20] P. C. Hammer, Approximation of convex surfaces by algebraic surfaces. *Mathematika* **10** (1963), 64–71.

[21] A. M. Oberman, The convex envelope is the solution of a nonlinear obstacle problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), no. 6, 1689–1694 (electronic).

[22] P. Lindqvist, On the definition and properties of p-superharmonic functions. *J. Reine Angew. Math.* **365** (1986), 67–79.

[23] J. Kinnunen and J. L. Lewis, Higher integrability for parabolic systems of p-Laplacian type. *Duke Math. J.* **102** (2000), no. 2, 253–271.

[24] M. Parviainen, Global gradient estimates for degenerate parabolic equations in nonsmooth domains. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **188** (2009), no. 2, 333–358.

[25] A. Friedman, A strong maximum principle for weakly subparabolic functions. *Pacific J. Math.* **11** (1961), 175–184.

[26] H. J., Kushner, Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 129. *Academic Press* [*Harcourt Brace Jovanovich, Publishers*]*, New York–London*, 1977.

[27] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picque, and S. E. Shreve, Robustness of the Black and Scholes formula. *Math. Finance* **8** (1998), no. 2, 93–126.

[28] L. Schwartz, Mathematical analysis, Vol. 1. (Russian) *Mir, Moscow*, 1972.

[29] K. Yosida, Functional analysis. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 123. *Springer-Verlag, Berlin–New York*, 1980.

[30] L. Deniau, Proposition d'un opérateur géométrique pour l'analyse et l'identification de signaux et images. *Ph.D. Thesis, Universite de Paris–Sud, Centre d'Orsay, Dec.*, 1997.

[31] J. L. Rogava, Semidiscrete schemes for operator-differential equations. (Russian) *Izdatel'stvo ``Tekhnicheskogo Universitet'', Tbilisi*, 1995.

[32] N. Aguilera, L. Forzani, and P. Morin, On uniform consistent estimators for convex regression. *J. Nonparametr. Stat.* **23** (2011), no. 4, 897–908.

[33] A. Friedman, Stochastic differential equations and applications. Vol. 1. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28. *Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York–London*, 1975.